Revista Digital Universitaria

10 de diciembre 2005 • Volumen 6 Número 12 • ISSN: 1067-6079

ARTICULO

FRACTALES, MÁS ALLÁ DE 1D, 2D O 3D

Ariel Osvaldo Quezada, Len
Coordinador Centro de Psicología Aplicada

http://www.revista.unam.mx/vol.6/num12/art119/art119.htm

FRACTALES, MÁS ALLÁ DE 1D, 2D O 3D

Resumen

En este artículo se describirá una novedosa geometría que ha sorprendido tanto a la comunidad científica por su utilidad en la descripción de diversos objetos y sistemas como también al público general, cautivado por la estética de sus formas infinitas.

Se presentará una breve revisión histórica de cómo ha surgido la geometría *fractal*, complementando la geometría tradicional. Luego, se expondrá algunos aspectos de las dimensiones, abarcando la dimensión topológica y la dimensión *fractal*. A continuación se describirán las características de los objetos *fractales* y se dará una definición de fractal. Finalmente se mostrarán algunas de las muchas aplicaciones de la geometría *fractal* en las ciencias.

Palabras clave: *Fractales*, sistemas complejos, dimensión *fractal*, dimensión topológica.

FRACTALS, BEYOND 1D, 2D OR 3D

Abstract

This article describes a novel geometry that has surprised so much the scientific community by its utility in the description of several objects and systems, like also to the general public, captivated by the beauty of its infinite forms.

A brief historical revision of how will appear geometry has raised fractal, complementing traditional geometry. Soon, there will be exposed some aspects of the dimensions, including the topologic dimension and the fractal dimension. Next, fractals will be described to the characteristics of the objects and a fractal definition will occur. Finally there will be shone some applications of geometry fractal in sciences.

Key words: Fractals, complex systems, fractal dimension, topologic dimension.

10 de diciembre 2005 • Volumen 6 Número 12 • ISSN: 1067-6079

INTRODUCCIÓN

A finales del Silgo XIX y comienzos del XX se vino gestando una revolución sigilosa en las ciencias. Esta revolución ha estado ligada a una apertura en mirada de los objetos de estudio, integrando los aspectos menos "controlados" y "dóciles" de aquellos, muchas veces dejados de lado, sindicados como "monstruos" o "aberraciones".

A partir de una serie de ejemplos en los que las descripciones clásicas no resolvían problemáticas, fue surgiendo una sorprendente teoría nacida desde la matemática: la geometría fractal. Ésta geometría pudo integrar aquellos aspectos a los cuales la ciencia tradicional no daba respuesta y, progresivamente, su campo de aplicación se fue haciendo más amplio, llegando a tener en la actualidad utilidad en diversas áreas del conocimiento.

A continuación se abordarán los orígenes históricos de esta geometría, algunas nociones teóricas básicas, su fundador y el nacimiento de la teoría, el concepto de fractal y sus características fundamentales, la forma de estimar la dimensión fractal y cómo se inserta en la ciencia. Desde esta perspectiva se podrá comprender porqué la denominación de 1D, 2D o 3D debe ser complementada con otras dimensiones intermedias.

Naturaleza Indómita

¿Por qué a menudo se describe la geometría como algo "frío" y "seco"? Una de las razones es su incapacidad para describir la forma de una nube, una montaña, una costa o un árbol. Ni las nubes son esféricas, ni las montañas cónicas, ni las costas circulares, ni la corteza es suave, ni tampoco el rayo es rectilíneo." (Mandelbrot, 1982/1997, p. 15)

Desde los orígenes de la civilización, los seres humanos han tratado de descifrar las claves de la naturaleza para poder comprenderla y desenvolverse en ella. Muchas veces estos esfuerzos han requerido simplificar aquello que se analiza para hacer manejable la información obtenida. Las distintas ciencias han descrito regularidades en los respectivos objetos de estudio y, entre ellas, la geometría, como rama de las matemáticas abocada al estudio de las propiedades de las figuras en el plano o en el espacio, también lo ha hecho.

La geometría tradicional, aquella estudiada inicialmente por *Euclides* dio cuenta de una serie de regularidades en la naturaleza, precisamente realizando importantes simplificaciones en la descripción de la naturaleza. Desde esta perspectiva, un cuerpo en el espacio se encuentra en una peculiar dimensión topológica y, en consecuencia, se ha enseñado que las dimensiones topológicas son las siguientes:

Es 0 si es un punto aislado o un número finito de puntos
Es 1 si es una recta o cualquier curva estándar
Es 2 si es un plano y cualquier otra superficie ordinaria
Es 3 si es un espacio o un objeto con volumen

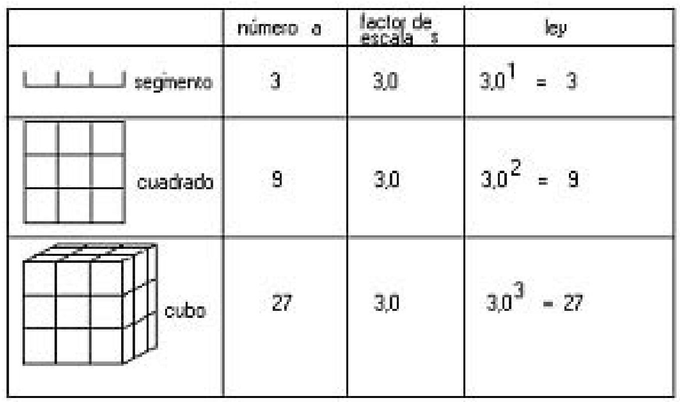
No obstante, en un período crítico que va desde 1875 hasta 1925, iniciado por Georg Cantor (1845-1918) en 1977, seguido posteriormente por Giuseppe Peano (1858-1932) en 1890, Helge Von Koch (1870-1924) en 1904 y Felix Hausdorff (1868-1942) en 1919, los matemáticos se fueron percatando de que no era posible una comprensión apropiada de las formas irregulares y fragmentadas a través de las dimensiones descritas por la geometría tradicional.

Freeman Dyson, en 1978 (crf. Mandelbrot, 1982/1997), afirma que la naturaleza ha gastado una broma a los matemáticos. Es probable que a los matemáticos decimonónicos les haya faltado imaginación, pero no

así a la naturaleza. Las mismas estructuras “patológicas” que inventaron los matemáticos para escapar del naturalismo del Siglo XIX resultaron ser inherentes a muchos de los objetos que nos rodean.
Esta necesidad de incorporar los aspectos más irregulares de la naturaleza no era posible de satisfacerse con la matemática clásica, vinculada a las estructuras regulares de la geometría de Euclides y a la evolución continua propia de la dinámica de Newton. Se hacía imperioso el surgimiento de una matemática y una geometría nueva, que diera cuenta no sólo de estas raras figuras inventadas por los matemáticos de fines del Siglo XIX, sino que de los objetos naturales que nos rodean. Desde esta necesidad comienza a surgir la Geometría Fractal.

Sobre dimensiones

Para dar respuesta a estas estructuras “monstruosas” o “patológicas” que no se ajustaban a las dimensiones con números enteros, tal como reza la geometría de Euclides, surgen los trabajos de Félix Hausdorff en 1919. En ellos se demuestra que la dimensión que ocupa cada objeto, podría calcularse si se encuentra el factor de escala mediante el cual matemáticamente dicho objeto se puede reproducir. Esto es, para ciertas figuras ideales se puede decir que su dimensión no es un entero sino que una fracción (Mandelbrot, 1977/1987). Al observar la Figura 1 se ilustra cómo se puede calcular la dimensionalidad de un objeto geométrico.



	número a	factor de escala s	ley
segmento	3	3,0	$3,0^1 = 3$
cuadrado	9	3,0	$3,0^2 = 9$
cubo	27	3,0	$3,0^3 = 27$

Figura 1. Ejemplo de cálculo de dimensionalidad de tres estructuras geométricas.

El concepto intuitivo de la dimensión de un objeto se puede expresar de una manera muy simple bajo la forma de la ley de escala a = sD. Ahora bien, tal como aparece en la Figura 1, si se divide un segmento en, por ejemplo, tres partes iguales, el total es tres veces más largo que cada trozo. Si se divide un cuadrado en porciones iguales, de manera que el lado del cuadrado total sea tres veces mayor que el de los cuadrados en que éste se divide, se obtienen 32, es decir 9 porciones. Para un cubo se obtiene a =33 cubitos componentes iguales. La dimensión de la geometría euclidiana clásica, dada por un exponente entero, aparece también en las unidades de longitud usuales: metro cuadrado = m2, metro cúbico = m3 (Jürgens, Peitgen & Saupe, 1990).

Bajo esta nueva forma de análisis, descrita inicialmente por Hausdorff, se puede lograr el cálculo de la dimensión de aquellas “estructuras monstruosas”. Algunas estructuras clásicas se muestran en la Figura 2. Al igual que en el ejemplo anterior, al dividir los objetos en partes iguales, se puede expresar el número de partes en función del factor de escala de acuerdo con la ley a = sD. Despejando D se obtiene: D = log a / log s. Se ve que, por ejemplo, la curva de Koch puede construirse juntando cuatro porciones iguales, siendo la curva total tres veces mayor que cada una de las partes.

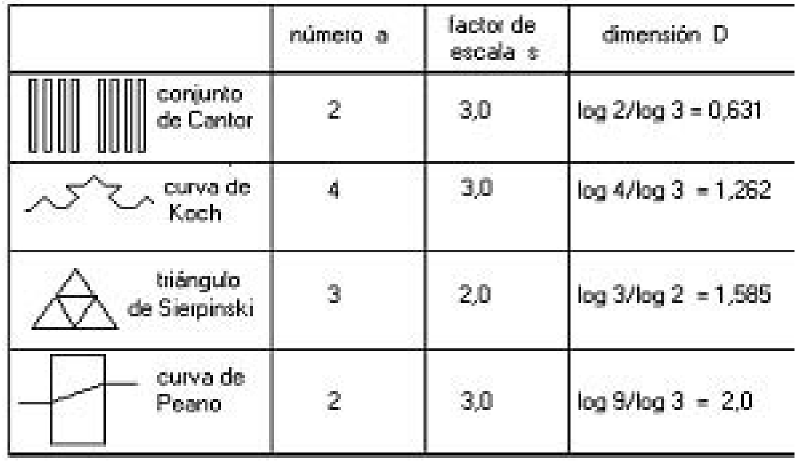
De este modo se observa que algunos objetos matemáticos y probablemente muchos objetos naturales frecuentemente se encuentran en una dimensión no entera en el espacio, es decir, su dimensión es un número decimal mayor que la dimensión topológica de origen (número entero) del mismo.

Mandelbrot y el nacimiento de la Geometría Fractal

Los primeros nombres que se relacionan con esta disciplina, aunque sin hablar de fractales propiamente tal, son los ya conocidos Cantor, Peano, Hausdorff y von Koch, además de Hilbert y Sierpinski. Hay también

10 de diciembre 2005 • Volumen 6 Número 12 • ISSN: 1067-6079

otros nombres no directamente involucrados pero que sentaron las bases de la teoría de la medida, fundamental para realizar una descripción matemáticamente correcta de los objetos que luego pasaron a llamarse fractales: Lebesgue, Poincaré, Menger y algunos de los antes citados, entre otros (Solé & Manrubia, 2001).



	número a	factor de escala s	dimensión D
conjunto de Cantor	2	3,0	log 2/log 3 = 0,631
curva de Koch	4	3,0	log 4/log 3 = 1,262
triángulo de Sierpinski	3	2,0	log 3/log 2 = 1,585
curva de Peano	2	3,0	log 9/log 3 = 2,0

Los fractales, como estructuras matemáticas, aparecieron hacia fines del Siglo XIX, inicialmente con el nombre de curvas no derivables, o no rectificables, siendo ejemplo de objetos curiosos. Se trataba de curvas o superficies interminablemente plegadas, líneas infinitas compactificadas de forma regular en una superficie finita, superficies no derivables en ningún punto, conjuntos de puntos aislados isomorfos a la recta final, por mencionar sólo algunos objetos no rectificables (Falconer, 1990).

Figura 3. Fotografía de Benoît Mandelbrot, fundador de la Geometría Fractal
Fuente: Mathematics Department - Yale University

Si bien muchos autores aportaron y prepararon el camino para el surgimiento de una geometría nueva, la comunidad científica reconoce que el padre de la Geometría Fractal es Benoît Mandelbrot (Chapman, 2003) (ver Figura 3). Es completamente cierto que las creaciones de muchos matemáticos jugaron un rol primordial en el concepto de la nueva geometría de Mandelbrot, no obstante, es necesario reconocer que ellos no pensaron en sus creaciones como un paso conceptual hacia una nueva percepción o una nueva geometría de la naturaleza (Peitgen, Jürgens & Saupe, 1992).

Benoît Mandelbrot nació en Polonia en 1924, en el seno de una familia judía lituana, que luego emigró a Francia en 1936. El matemático en su juventud, frustrado con la abstracta matemática que enseñaban en la escuela, cautivó una fascinación por la irregularidad geométrica del mundo (Briggs & Peat, 2001). Su particular mirada de los fenómenos de la naturaleza estuvo fuertemente marcada además por la interdisciplinariedad y el rechazo a los límites demarcados entre disciplinas científicas, cuestión que se observa ya desde su disertación doctoral en la que combina lingüística matemática y termodinámica estadística (Chapman, 2003).

Al comenzar la década de los 70, Mandelbrot recobró el antiguo interés por un escrito de Gaston Julia (1893-1978) de 1918 titulado Mémoire sur l'iteration des fonctions rationelles, precursor de la moderna teoría de sistemas dinámicos. Inspirado en dicha lectura y con ayuda de las facilidades computacionales puestas a su disposición por IBM a partir de 1957 en el centro de investigación Thomas J. Watson, logró crear las primeras ilustraciones de su ensayo de 1975, titulado Les objets fractals: Forme, hasard et dimension. Ya en 1980 y con ayuda de un ordenador VAX, pantalla Tektronix y hardcopy Versatac, sorprendió a la comunidad científica con el primer dibujo detallado de un gráfico deducido de la evolución del sistema dinámico en el campo complejo, evidenciando la apariencia de una figura fractal, tal como se puede observar en la Figura 4.

Figura 3. Imagen fractal a partir de iteraciones del conjunto de Mandelbrot.
Fuente: IBM. <http://www.research.ibm.com/resources/news/20021218_Benoît_Mandelbrot.shtml>

Benoît Mandelbrot, desde su puesto en el centro de investigación Thomas J. Watson de IBM se dedica al estudio de series temporales relacionadas con precios y posteriormente el ruido de las líneas telefónicas para interconexión de ordenadores. Paralelamente realiza docencia en la Universidad de Yale, obteniendo en su trayectoria una gran cantidad de galardones y reconocimientos, dentro de los que se encuentran Franklin Medal, Alexander Von Humboldt, Nevada Medal y Japan Prize.

La singular mirada de la naturaleza y sus formas por parte de Mandelbrot procuró una geometría nueva, en la que hay una estrecha relación entre forma y contenido, lo que se plasma en las propias palabras de este autor:

Estoy profundamente convencido de que la abstracción forzada, la importancia dada a la formación, y la proliferación de los conceptos y términos, hacen a menudo más mal que bien. No soy el último que lamenta que las ciencias menos exactas, aquéllas cuyos mismos principios son los menos seguros, sean axiomatizadas, rigorizadas y generalizadas con suma pulcritud. Estoy encantado, por lo tanto, de poder discutir muchos ejemplos nuevos, para los que las relaciones entre forma y contenido se presentan de una manera clásicamente íntima. (Mandelbrot, 1977/1987)

En las palabras del matemático se puede percibir su interés por el diálogo dinámico entre forma y contenido plasmado en el espíritu de la geometría fractal, que precisamente hace de puente entre aspectos cuantitativos y cualitativos de los objetos de la naturaleza.

Definición de Fractal y su propiedad de Autosimlitud

Como anteriormente se ha insinuado, la aparición propiamente tal de los fractales coincide con la edición de Les objets fractals: Forme, hasard et dimension, en 1975 y reeditado en 1977. En esta obra, Mandelbrot realiza una serie de definiciones en torno a los fractales:

FRACTAL. Adj. Sentido Intuitivo. Que tiene una forma, bien sea sumamente irregular, bien sumamente interrumpida o fragmentada, y sigue siendo así a cualquier escala que se produzca el examen. Que contiene elementos distintivos cuyas escalas son muy variadas y cubren una gama muy amplia. Razones de su necesidad: Desde hará unos cien años, los matemáticos se habían ocupado de algunos de esos conjuntos, pero no habían edificado ninguna teoría acerca de ellos, y no habían necesitado, por lo tanto, ni la necesidad de un término específico para designarlos. Una vez que el autor ha demostrado que en la naturaleza abundan objetos cuyas mejores representaciones son conjuntos fractales, es necesario disponer de una palabra apropiada que no sea compartida con ningún otro significado.

FRACTAL. n.f. Configuración fractal, conjunto u objeto fractal. Advertencia: La palabra fractal no distingue, adrede, entre conjuntos matemáticos (la teoría) y los objetos naturales (la realidad): se emplea en los casos en que su generalidad, y la ambigüedad deliberada que resulta de ello sean bien deseadas, bien aclaradas por el contexto, o no lleven inconvenientes asociados.

Objeto fractal. Objeto natural que resulta razonablemente útil representarlo matemáticamente por un conjunto fractal.

En 1982, el mismo Mandelbrot publica un nuevo libro, con gráficos sorprendentes creados con la tecnología informática que, por aquel tiempo, estaba a su disposición. Este libro se llama, The Fractal Geometry of Nature. En esta obra, Mandelbrot (1982/1997) propone la definición que sigue:

10 de diciembre 2005 • Volumen 6 Número 12 • ISSN: 1067-6079

Un fractal es, por definición, un conjunto cuya dimensión de Hausdorff-Besicovitch es estrictamente mayor que su dimensión topológica.

Los conjuntos con D no entera son fractales. (p. 32)

El autor acuña el término fractal para acoger a los distintos “monstruos” matemáticos que progresivamente fueron aumentando en cantidad, acompañados por aquellos “monstruos” que se fueron descubriendo en la naturaleza. La palabra fractal deriva del adjetivo latino fractus, que significa fragmentado, quebrado o irregular, lo que corresponde exactamente con las características gráficas de los objetos fractales y con su respectiva dimensión.

La dimensión fractal se puede definir matemáticamente como:

$$DF = -\lim_{\delta \to 0} \frac{\ln N(\delta)}{\ln \delta}$$

en donde N (δ) es el número de elementos de longitud característica δ necesarios para recubrir el conjunto estudiado.

Sin embargo, se está ante un concepto geométrico para el que aún no existe una definición precisa, ni una teoría única y comúnmente aceptada, razón por la cual es difícil encontrar una definición satisfactoria del concepto fractal. No obstante, se pueden extraer algunas características fundamentales que, de cumplirse una o todas, se podría hablar de un conjunto fractal. Así, un conjunto fractal sería (Mas, Mach, Trigueros, Claret & Sagués, 1996):

a) Un conjunto que es suficientemente irregular por no poder ser descrito con el lenguaje geométrico habitual, tanto localmente como globalmente;
b) Un conjunto que tiene una estructura fina, es decir, que tiene detalles en cualquier escala en que se le observa;
c) Un conjunto que presenta alguna forma de autosemejanza, que puede ser aproximada o estadística:
d) Y, usualmente, la dimensión fractal (definida de alguna manera) es más grande que su dimensión topológica, y no tiene por qué ser entera.

Existen, además, algunas características adicionales propias de las estructuras fractales. De este modo, una estructura fractal satisface alguna(s) de las propiedades siguientes (Falconer, 1990):

a) Posee detalle a todas las escalas de observación;
b) No es posible describir una estructura fractal con la Geometría Euclidiana, tanto local como globalmente;
c) Una estructura fractal posee alguna clase de autosemejanza, posiblemente estadística;
d) La dimensión fractal de una estructura fractal es mayor que su dimensión topológica;
e) El algoritmo que sirve para describir una estructura fractal es muy simple, y posiblemente de carácter recursivo

Intentando integrar los aspectos que tienen más relevancia en una gran cantidad de definiciones, se propone la siguiente definición: Los fractales son formas (o bien que se encuentran en la naturaleza, o bien creadas matemáticamente, o bien derivadas de la caracterización gráfica del comportamiento de un sistema), que poseen una irregularidad, expresada en una dimensionalidad no entera, que se mantiene y que es característica a distintas escalas de análisis, cumpliendo así con una de sus cualidades más notables, la autoafinidad, que significa que la parte es semejante al todo.

Teniendo ya una definición con la cual se pueda identificar a un objeto fractal, se puede analizar su característica fundamental, a saber, la autosimilitud (self- similarity). Se dice que una estructura es autosimilar si puede ser cortada arbitrariamente en trozos pequeños, cada uno de los cuales es una pequeña réplica de la estructura completa (Peitgen, Jürgens & Saupe, 1992). En estricto rigor, el concepto de autosemejanza o autosimilitud se aplica sólo en fractales matemáticos (que surgen de la iteración de fórmulas sencillas pero que llevan a estructuras muy complejas. e.g. Polvo de Cantor, Curva de Peano, Copo de Nieve de Koch, etc.), mientras que en los fractales naturales o físicos (aquellos que se encuentran en la naturaleza. e.g. una hoja de helecho, una arborización bronquial, os capilares sanguíneos, etc.) se aplica el concepto de autoafinidad, ya que su fractalidad es solamente estadística y poseen, en consecuencia, un escalamiento anisotrópico (que no tiene las mismas propiedades en todas dimensiones de análisis), lo que no permite que una parte amplificada de una figura mantenga exactamente las características de la figura como un todo (Hinojosa & Chávez, 2001).

Resulta interesante notar que la irregularidad de los objetos fractales pasa a ser una característica particular del objeto y da cuenta de la similitud que tienen sus partes respecto al todo, con independencia de la escala de análisis utilizada, condición que gráficamente se puede observar en la Figura 5.

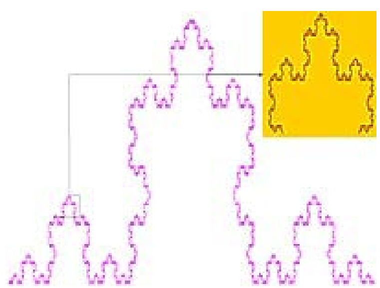


Figura 5. Autosemejanza de la figura fractal del copo de nieve de von Koch.
Fuente: Universidad de Oviedo
http://coco.ccu.uniovi.es/geofractal/capitulos/01/01-03.shtm

Cálculo de la Dimensión Fractal de los Objetos

Existen muchas técnicas y diferentes estrategias para estimar la Dimensión Fractal de un objeto irregular (Mas, Mach, Trigueros, Claret & Sagués, 1996). Sin embargo, en este artículo se expondrá la técnica de cálculo más clásica: Box Counting Dimension.

Anteriormente se ha entregado una definición matemática de la dimensión fractal. No obstante, en la práctica generalmente resulta imposible la realización del límite δ 0, debido a la inexistencia, en la mayoría de los casos, de una expresión analítica que proporcione N (δ) en función de δ, situación que impide el cálculo teórico de dicho límite. Por esta razón se creó una forma práctica para medirla, denominada Box Counting Dimension.

La dimensión fractal de un objeto geométrico dado, tal como se observa en la Figura 6, puede caracterizarse mediante el número de cajas que lo recubren en un retículo. Para esto, se debe contar en cada análisis el número N de cajas que recubren al menos una parte del objeto.

10 de diciembre 2005 • Volumen 6 Número 12 • ISSN: 1067-6079

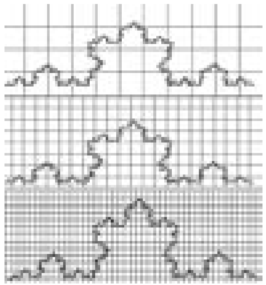


Figura 6. Box Counting Dimension sobre la figura del Copo de Nieve de Koch.

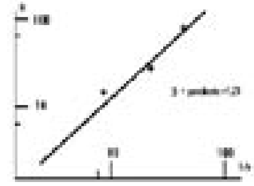


Figura 7. Pendiente de la razón log N/log (1/e), que proporciona el valor de la dimensión fractal D.

A continuación, la relación entre N y el valor del lado e (épsilon) de los cuadrados del retículo se refleja en un diagrama doblemente logarítmico en el cual los puntos correspondientes se sitúan aproximadamente sobre una recta, cuya pendiente –que se ve expresada por la razón log N/log (1/e)- proporciona el valor de la dimensión fractal D (Jürgens, Peitgen & Saupe, 1990). De esta manera, la dimensión fractal se ve expresada como la pendiente de una curva sobre un papel doblemente logarítmico (Labra, 1995; Masters, 2004). Esto se observa en la Figura 7.

A modo de síntesis de esta técnica, se dice que para el cálculo de la dimensión por medio del Box Counting se divide el cuadrado de la unidad que contiene el fractal en cajas iguales de diversos tamaños, que proporcionarán los datos experimentales para realizar luego una recta de regresión (Solé & Manrubia, 2001), permitiendo con facilidad la estimación de la dimensión fractal, dado que la relación entre la escala de análisis (el tamaño del lado) y el número N de objetos recubiertos se ¿Dónde se encuentran los fractales y cuál es su relación con la ciencia?

Al avanzar en la lectura del presente artículo se podría esperar encontrar fractales con facilidad, lejos de creer que estas formas son excentricidades o excepciones de difícil aparición cotidiana.

Existen fractales matemáticos que surgen gracias a la iteración de sus fórmulas matemáticas (ver Figura 8) como también hay fractales naturales o aquellos que se encuentran espontáneamente en la naturaleza (ver Figura 9)

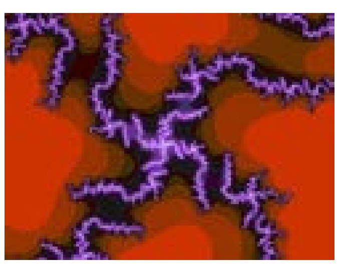


Figura 8. Aspecto gráfico de un fractal matemático

Figura 9. Aspecto gráfico de una coliflor como fractal natural

Diversas disciplinas científicas han tenido un progresivo acercamiento con la geometría fractal, ligado a su aplicabilidad matemática, científica y tecnológica, que estimulan la dedicación a la observación y estudio de las estructuras fractales. Los fractales parecen ser una herramienta adecuada para el estudio matemático profundo de, por ejemplo, el análisis cuantitativo de singularidades que naturalmente aparecen en los sistemas dinámicos (De Guzmán, 1993).

La contribución de los fractales para la comprensión del mundo redunda en una suerte de filosofía natural, una visión integrada del mundo, un elemento organizador. Sin embargo se reconoce que los modelos fractales en estos momentos son más bien descriptivos que explicativos (Stewart, 1998), lo que no reduce en caso alguno su utilidad y potencia para su empleo en las ciencias.

Mandelbrot explica que todos los objetos naturales aludidos en La geometría fractal de la naturaleza son “sistemas”, en el sentido que están formados por muchas partes distintas articuladas entre ellas y la dimensión fractal describiría esta regla de articulación (Mandelbrot, 1982/1997). En efecto, pareciera que la geometría fractal sería, de algún modo, la geometría de los sistemas complejos (Solé & Manrubia, 2001).Un objeto fractal posee una dimensión fractal expresada por un número decimal que excede su dimensión topológica de origen, lo que permite pensar que, dependiendo de la irregularidad de la forma, ésta se complejiza ocupando progresivamente un mayor lugar en el espacio. De este modo, se está frente a una herramienta que describe en un sistema complejo la forma o patrón (cualidad) a través de una formalización matemática. La dimensión fractal, en este entendido, da cuenta del diálogo entre cantidad y cualidad en un objeto de la naturaleza con características fractales (Quezada, 1998, 2005).

La ciencia, al intentar descubrir el mundo, acude a series de imágenes o modelos cada vez más “realistas”. Los más simples son continuos perfectamente homogéneos y la física tradicional ha triunfado identificando una gran cantidad de dominios en los que esas imágenes son sumamente útiles. Sin embargo, hay otros dominios en los que la realidad se revela tan irregular que el modelo continuo y perfectamente homogéneo fracasa, sin servir siquiera como primera aproximación. Para abordar estos otros dominios en los que la realidad se muestra irregular es donde aparece la geometría fractal (Mandelbrot, 1982/1997) y pareciera que dichos dominios en caso alguno son excepcionales. Existen muchas formas naturales que son tan irregulares y fragmentadas que, en comparación con la geometría de Euclides (la geometría común), la naturaleza no sólo tiene un grado superior de complejidad sino que ésta se da en un nivel completamente diferente, ya que el número de escalas de longitud de las distintas formas naturales es, para efectos prácticos, infinito (Mandelbrot, 1977/1987).

Sin duda, uno de los aspectos más notables de la geometría fractal es que ofrece un modelo alternativo a otras geometrías. Busca una regularidad en las relaciones entre un objeto y sus partes a diferentes escalas. Esta forma de regularidad no precisa el “encorsetamiento” del objeto en otras formas geométricas que, aunque elementales, no dejan de ser externas al mismo, sino que busca la lógica interna del propio objeto mediante relaciones intrínsecas entre sus elementos constitutivos cuando estos se examinan a diferentes escalas. De esta manera en caso alguno se pierde la perspectiva ni del objeto global, ni del aspecto específico del mismo en cada escala de observación. En síntesis, la geometría fractal busca y estudia los aspectos geométricos que son invariantes con el cambio de escala (De Guzmán, 1993)

Es probable que al comienzo las primeras aplicaciones de la geometría fractal hayan estado ligadas a la física, matemáticas o biología, pero posteriormente se han encontrado innumerables ejemplos en casi todas las ramas del conocimiento. Pareciera ser que el mundo microscópico, orgánico e inorgánico, está lleno de objetos fractales. Los ejemplos que se pueden encontrar son de la más amplia gama: las fracturas, la superficie de las células, la estructura pulmonar o circulatoria, la formación de nubes, las montañas, probablemente la distribución de la materia en la galaxia, las fluctuaciones en la intensidad de la radiación de un quasar, los árboles, los líquenes, los relámpagos, y un largo etcétera (Solé & Manrubia, 2001). Precisamente, la geometría fractal tiene una irregularidad interna con una cierta ordenación, y describe la frontera entre el movimiento ordenado y el movimiento caótico de las trayectorias de un sistema (González, 1996).

10 de diciembre 2005 • Volumen 6 Número 12 • ISSN: 1067-6079

Los ejemplos de la aplicabilidad de los fractales también se han apreciado en fenómenos propios de las ciencias sociales. Por la naturaleza y características de los datos, las aproximaciones a la descripción fractal de fenómenos sociales se ha iniciado en la economía. La aplicación de los fractales en la volatilidad de precios y cambios de escala en economía la da el mismo Mandelbrot, analizando las variaciones de precios del algodón y determinando las características estacionarias de la serie (Mandelbrot, 1977/1987). Posteriormente ahonda en temas financieros relativos a la variabilidad temporal de precios especulativos en Fractals and Scaling in Finance (Mandelbrot, 1997). Importantes aplicaciones fractales en economía se encuentran en una nueva rama denominada Econofísica, que se caracteriza por utilizar herramientas de la Física, en particular, un área específica de ella llamada Física Estadística, obteniendo gran éxito en la explicación del comportamiento colectivo de grandes conglomerados de partículas. Es así que muchos econofísicos han comenzado a trabajar en el mundo de la economía, concretamente en el área de las finanzas, y entre sus herramientas de trabajo buena parte están ligadas a la geometría fractal (Mansilla, 2003; Lacasa & Luque, 2005). Dentro de estas herramientas se encuentra el exponente de Hurst, una técnica para estimar la dimensión fractal en series de tiempo.

Se han documentado también experiencias interesantes en el análisis de la forma de crecimiento de las ciudades, existiendo un consenso en que el crecimiento urbano no se produce de forma que el espacio disponible se llene en manera compacta. Dado que la dimensión vertical es despreciable frente a las dos dimensiones horizontales, se puede caracterizar la geometría de los asentamientos urbanos con una dimensión que varía entre 1 y 2. Cálculos realizados en más de 30 ciudades descubren una dimensión entre 1,6 y 1,8 en la mayoría de ellas. Un reflejo de una ciudad se halla analizando la autosimilaridad de la red de transportes urbanos (Solé & Manrubia, 2001), también observado recientemente en un estudio sobre la dimensionalidad de las líneas de metro y los ensambles de las estaciones en la red de transporte público de Seúl (Kim, Benguigui & Marinov, 2003) y en la dimensión fractal de las calles de Tokio (Rodin & Rodino, 2000).

Por último, Jean Piaget en su obra L'équilibration des structures cognitives. Problème central du développement, de 1975 inició incursiones teóricas respecto a los fractales (y, en general, los sistemas dinámicos) en la psicología para describir procesos cognoscitivos, casi de manera simultanea a la publicación del ensayo de Mandelbrot de 1975. Más recientemente, y sólo citando algunas aplicaciones que provienen de la psicología cognoscitiva, existen trabajos abocados a la caracterización del proceso de generación de inferencias sintéticas. En estas investigaciones, como una medida de la complejidad geométrica de las figuras formadas por los trazos de búsqueda de los sujetos, se estimó su dimensión fractal (Labra, Quezada, Cañete, Basaure & Mora, 2000). Es decir, las inferencias sintéticas analizadas fueron generadas en relación al juego "battleship" y plasmadas en una cuadricula de 10 x 10, para ser descritas posteriormente mediante la dimensión fractal de su recorrido en el tablero de juego (Cañete, 2000; Labra, 1995; Labra, Canals & Santibáñez, 1997; Labra, Quezada, Cañete, Basaure & Mora 2000; Quezada, 1998).

Conclusiones

A lo largo de este artículo se ha querido familiarizar al lector con una nueva geometría, que describe a la naturaleza sin reducir su complejidad y belleza inherentes.

Lejos de pensar que la naturaleza, sus objetos, sus comportamientos y sus formas, se ajustan a patrones discretos y rígidos, muy por el contrario, una importante facción de la ciencia se está incorporando a la adopción de un modelo comprensivo y metodológico que integra la complejidad de los sistemas, desechando miradas que buscan la simplificación, acogiendo así a la geometría propia de ella: la geometría fractal.

Sin duda alguna esta nueva geometría tiene una historia aún muy breve, sin embargo sus proyecciones son tremendamente alentadoras, dado que han posibilitado la descripción de patrones, ya sean gráficos y/o de comportamientos de diversos sistemas.

La invitación es abierta para que distintos dominios del quehacer humano puedan indagar las potencialidades de la geometría fractal en sus disciplinas. Y no sólo aquellos ligados a las ciencias, dado que también esta geometría ha impactado a distintos círculos con su estética exquisita. A su vez, existe también la confianza de que su utilidad va más allá de una moda pasajera que sólo alimenta recursos retóricos. Definitivamente se está frente a un cambio de mirada o, probablemente, a una ampliación de ella.

10 de diciembre 2005 • Volumen 6 Número 12 • ISSN: 1067-6079

Bibliografía

Briggs, J. & Peat, F. D. (2001). Espejo y Reflejo: Del Caos al Orden. Barcelona: Editorial Gedisa S. A.

Cañete, O. (2000). Descripción de la variabilidad dinámico funcional del pensamiento en niños de 10 a 14 años, durante la resolución del Combate Naval, mediante técnicas de representación gráfica. Tesis de Licenciatura, Universidad de Valparaíso, Valparaíso.

Chapman, T. (2003). Father of fractal complexity. Quantitative Finance, 3(5): 88-90

De Guzmán, M. (1993). Estructuras fractales y sus aplicaciones. Barcelona: Editorial Labor, S. A.

Falconer, K. (1990). Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications. New York: John Wiley and Sons.

González, R. (1996). Física para juristas, economistas … y demás gente curiosa. Barcelona: Crítica.

Hinojosa, M. & Chávez, L. (2001). Autoafinidad de superficies de fractura del vidrio, Ingenierías, 4 (13), 50-54.

Jürgens, H., Peitgen, H.-O. & Saupe, D., (1990). El lenguaje de los fractales. Investigación y Ciencia, 169, 46-57.

Kim, K. S., Benguigui, L. & Marinov, M. (2003). The fractal structure of Seoul's public transportation system. Cities, 20 (1), 31-39.

Labra, F. (1995). Descripciones fractales de procesos inferenciales en niños y adolescentes durante la creación de hipótesis tendientes a la solución de problemas. Tesis de Maestría, Universidad de Chile, Santiago de Chile, Chile.

Labra, F., Canals, M. & Santibáñez, I. (1997). Descripciones fractales de procesos inferenciales en niños durante la creación de hipótesis tendientes a la solución de problemas. Revista de Psicología de la Universidad de Chile, 6, 123-38.

Labra, F., Canals, M. & Santibáñez, I. (1997). Descripciones fractales de procesos inferenciales en niños durante la creación de hipótesis tendientes a la solución de problemas. Revista de Psicología de la Universidad de Chile, 6, 123-38.

Lacasa, L. & Luque, B (2005). Econofísica. Boletín Económico del ICE. (No. de publicación 2844, Clasificación JEL: C73. del 9 al 15 de mayo).

Mandelbrot, B. (1997). La Geometría Fractal de la naturaleza. Barcelona: Tusquets Editores, S. A. (Trabajo original publicado en 1982)

Mandelbrot, B. (1997). Fractals and Scaling in Finance. New York: Sprinter-Verlag.

Mandelbrot, B. (1987). Los objetos fractales: forma, azar y dimensión. Barcelona: Tusquets Editores, S. A. (Trabajo original publicado en 1977)

Mansilla, R. (2003). Introducción a la econofísica. Madrid: Equipo Sirius.

Mas, F., Mach, J., Trigueros, P. P., Claret, J. & Sagués, F. (1996). Creixement fractal: als límits de la modelització. En E. Casassas & M. Esteban (Eds.). Modelització macroscòpica en Ciències Experimentals. (pp. 115-135). Barcelona: Institut d'Estudis Catalans.
Masters, B. R. (2004). Fractal analysis of the vascular tree in the human retina. Annual Review of Biomedical Engineering. 6 (1), 427-452.

Peitgen, H-O., Jürgens, H. & Saupe, D. (1992). Fractal for the classroom. Part One, Introduction to Fractal and Chaos. New York: Springer-Verlag.

Piaget, J. (1990). La equilibración de las estructuras cognitivas. Problema central del desarrollo. Madrid: Siglo XXI de España Editores, S. A. (Trabajo original publicado en 1975).

Quezada, A. (2005). Fractales por doquier, desde ríos hasta sondeos de opinión. Una aproximación a la utilización metodológica de la geometría fractal. Encuentros de Psicología Social, 3 (2), 58-64.

Quezada, A. (1998). Descripción dinámica del fenómeno de equilibración cognoscitiva en procesos inferenciales sintéticos durante la generación de hipótesis para la solución de problemas. Tesis de Licenciatura, Universidad de Valparaíso.

Rodin, V. & Rodina, E. (2000). The fractal dimension of Tokyo's streets. Fractals, 8 (4), 413-418.

Solé, R: V. & Manrubia, S. (2001). Orden y caos en sistemas complejos. Fundamentos. Barcelona: Edicions UPC.

Stewart, I. (1991). ¿Juega Dios a los dados?. Barcelona: Editorial Crítica, S. A.