

SEGUNDO REPASO **UNIDAD 3**

CONDUCCIÓN EN ESTADO NO ESTACIONARIO

Trabajo realizado con el apoyo del Programa
UNAM-DGAPA-PAPIME PE110517

RESUMEN DE LA UNIDAD

CONCEPTOS

- No estacionario
- Geometría
- Condiciones a la frontera.
 - *Eigen* valor
 - *Eigen* función
 - Temperatura
 - Flujo
 - Constante.
 - Cero
 - Diferente de cero
 - Convectivo

- En esta parte del curso nos hemos ocupado de entender y resolver problemas relativos a la evolución temporal de los perfiles de temperatura en diferentes geometrías y bajo distintas condiciones.
- El caso más sencillo ocurre cuando los gradientes de temperatura pueden considerarse como inexistentes. La validez de esta suposición la da el número de Biot.
- En el caso en que esta hipótesis no sea aceptable debe resolverse la ecuación de difusión
- Existen varios métodos para resolver la ecuación de difusión. En el curso vimos los métodos analíticos (a pie), analíticos con Mathematica, usando gráficas y Excel.
- En todos los casos debe tenerse cuidado en que el problema físico este bien entendido y planteado en términos de las condiciones de frontera correctas.
- El método gráfico puede usarse, combinando las soluciones de distintos casos, para resolver problemas multidimensionales.

¿QUÉ ESPERAMOS QUE SEPAN Ó PUE DAN

- Distinguir cuando se trata de un problema de energía dependiente del tiempo.
- Distinguir si se puede o no hacer uso de un gradiente cero
- Distinguir de que tipo de geometría se trata.
- Saber establecer las condiciones de frontera en términos matemáticos. (Temperatura, Flujo)
- Seleccionar un método de solución (gráfico, analítico, numérico...).
- Operar el método seleccionado para obtener la solución del problema planteado.





no es estrictamente
parte del curso...
...Pero muy útil

Interpretar los problemas de
Ingeniería Química Metalúrgica
en términos de problemas de
transferencia de calor

PROCESOS METALÚ

El transporte de energía por conducción en estado in
importante en varios procesos relacionados con el ac

- Fusión de la carga en un horno eléctrico de a
- Solidificación de acero líquido en un molde e
- Colada continua de acero líquido
- Laminación de palanquillas de acero
- Tratamiento térmico de un componente de acero
- Soldadura de componentes de acero

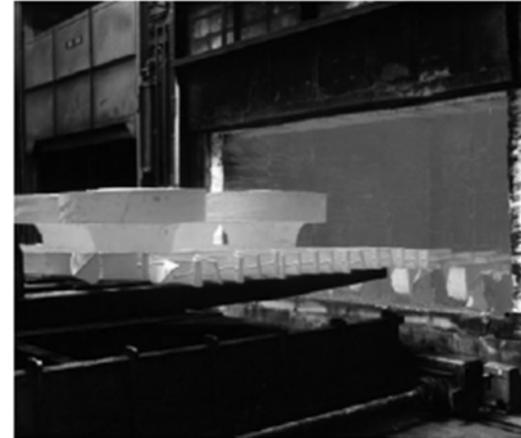


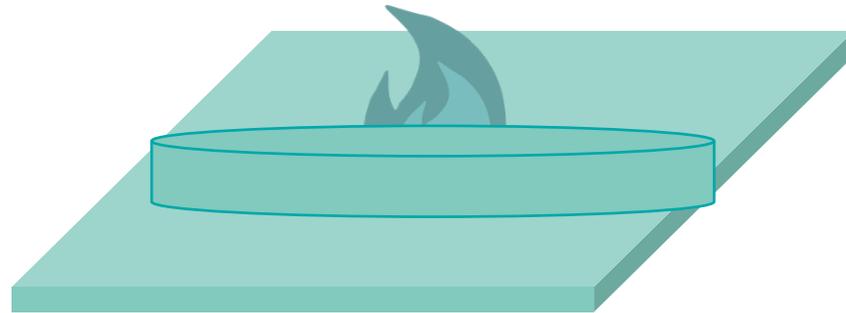
FIGURE 2.38 A large rectangular steel slab as it exits a heat treatment furnace.

Source: Courtesy of SBS, www.sbs-forge.com



TRATAMIENTOS TÉRMICOS

Tratamiento térmico: Variaciones controladas de temperatura a las que se somete una aleación sólida para modificar su estructura micrográfica y consecuentemente sus propiedades físicas, sin que cambie la composición química de la aleación





VARIACIÓN DE LOS COEFICIENTES DE TRANSPORTE

- Los coeficientes de transporte, como la viscosidad de los líquidos y de los gases o la conductividad de los metales y los no metales, varían:
 - De un material a otro. La cantidad transportada (flux) para un mismo gradiente depende del material, es decir de su coeficiente de transporte.
 - Para un mismo material, con la temperatura.

TEMAS

TRANSFERENCIA DE ENERGÍA EN ESTADO NO ESTACIONARIO SIN GRADIENTES DE TEMPERATURA

TRANSFERENCIA DE ENERGÍA EN ESTADO NO ESTACIONARIO CON GRADIENTES DE TEMPERATURA

- Coordenadas cartesianas
- Coordenadas no cartesianas
- Cilíndricas
- Esféricas
- Otras

EVOLUCIÓN TEMPORAL DEL PERFIL DE TEMPERATURAS.

CUANDO NO HAY GRADIENTE DE TEMPERATURAS

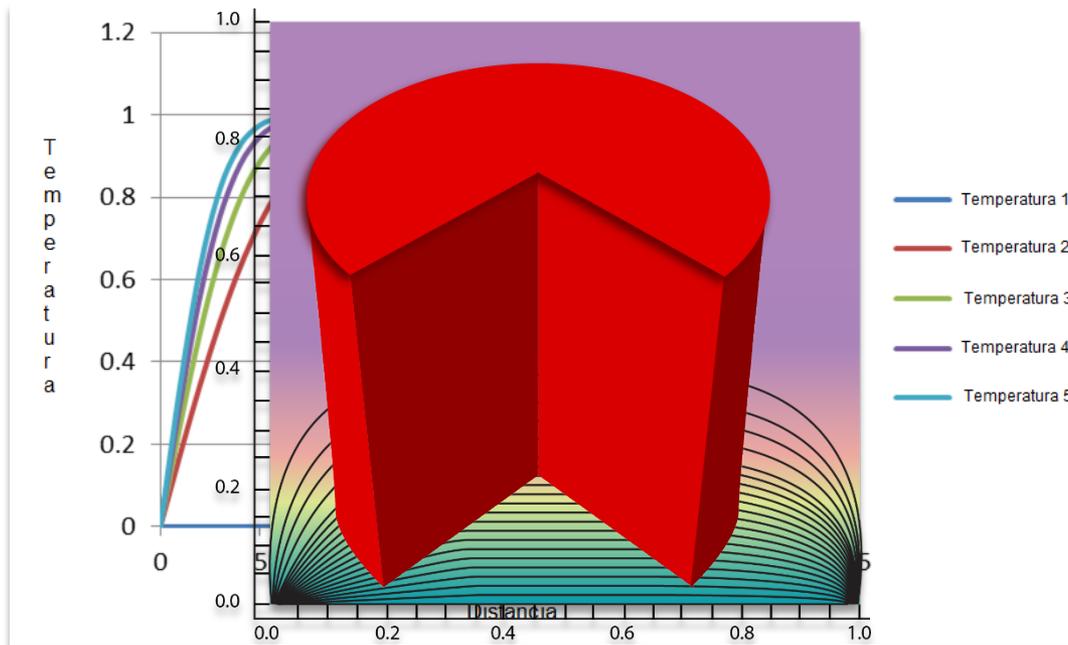
- Esfera metálica, cilindro,
- otras geometrías.

EVOLUCIÓN TEMPORAL DEL PERFIL DE TEMPERATURAS.

CON GRADIENTE DE TEMPERATURAS

- Coordenadas Rectangulares
 - Placa de espesor finito ($2H$)
 - Sólido semiinfinito
 - Con distintas condiciones de frontera
- Coordenadas Cilíndricas
 - Con transferencia de calor
 - Sin Transferencia de calor
- Otras coordenadas
 - Esféricas

EVOLUCIÓN TEMPORAL DEL PERFIL DE TEMPERATURAS



2 dimensiones

$$hA(T_{\infty} - T)dt = c_p\rho VdT \quad \frac{T - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} = e^{-(hA/c_p\rho V)t}$$

Con la condición:

$$N_{Bi} = \frac{hx_1}{k} < 0.1$$

SIN GRADIENTE

Condiciones a la frontera y geometría.

Las “condiciones a la frontera” son la ecuación de balance

La geometría entra en el N_{Bi}

Actividad.

CON GRADIENTE

La ecuación de difusión describe la conducción de calor en estado no estacionario, cuando no hay fuentes internas de generación de calor.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T$$

Donde α , la difusividad térmica, es el cociente $k/\rho C_p$

En una dimensión se simplifica a:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$



GEOMETRÍA Y CONDICIONES A LA FRONTERA

Esta ecuación representa una gran familia de fenómenos, para aplicarla a la solución de un caso particular es necesario fijar la geometría y las condiciones de frontera que lo describen.

En una dimensión toma la forma

Cartesianas \longrightarrow $\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

Cilíndricas \longrightarrow $\nabla^2 f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \frac{\partial f}{\partial \rho})$

Esféricas \longrightarrow $\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial f}{\partial r})$

MÉTODOS DE RESOLUCIÓN

VENTAJAS Y DESVENTAJAS

MÉTODO

Analítico

Separación de variables. «A pie»:

Analítico computacional.

Mathematica,
Maple

Numérico:

Diferencias finitas y elemento finito.

VENTAJAS

Es “exacto”

Es un método analítico

Existen muchos códigos libres ya programados (Fortran, C, etc.) para los principales casos.

DESVENTAJAS

Sólo aplica a unas pocas geometrías simples.

Requiere una infraestructura de cómputo.

Como usuarios se procede “a ciegas” o bien hay que aprender métodos numéricos y a programar.

MÉTODOS DE RESOLUCIÓN

VENTAJAS Y DESVENTAJAS

MÉTODO

Tablas y gráficas.
(Geankoplis, Bird,
Kreith...

Excel



VENTAJAS

Son muy accesibles
Prácticamente no hay
que hacer cálculos

Permite programar el
algoritmo de diferencias
o elemento finito.

Permite graficar
soluciones obtenidas
analíticamente.

DESVENTAJAS

No son muy precisas.
Hay que encontrar la que
corresponde al caso
particular.

No es un método de
cálculo.

ANALÍTICO «A PIE». CARTESIANAS (PLACA DE ESPESOR FINITO)

La solución es una suma de funciones trigonométricas, multiplicadas por una exponencial. :

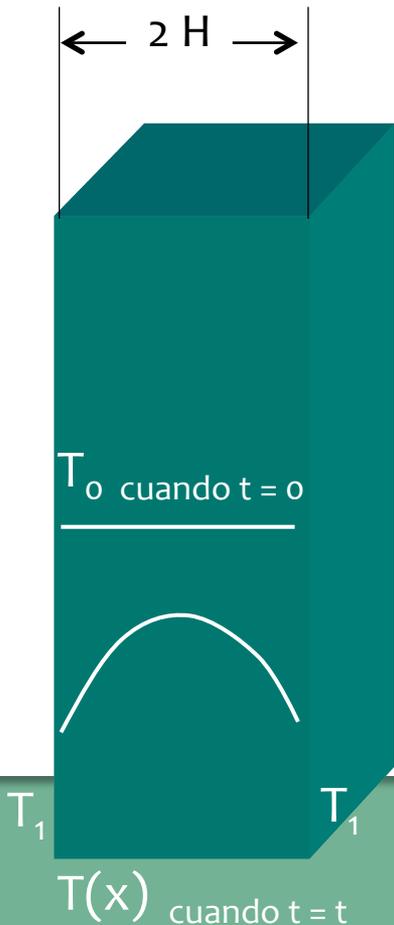
$$\frac{T_1 - T}{T_1 - T_0} = \frac{4}{\pi} \left(\frac{1}{1} \exp^{-12n^2\alpha t/4H^2} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2H} + \frac{1}{3} \exp^{-32\pi^2\alpha t/4H^2} \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{2H} + \frac{1}{5} \exp^{-52\pi^2\alpha t/4H^2} \operatorname{sen} \frac{5\pi x}{2H} + \dots \right)$$

Mientras más sumandos se tomen, mejor aproximación

Los valores de los eigenvalores y los coeficientes de las funciones se obtienen a partir de las condiciones a la frontera e iniciales.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \alpha = \frac{k}{\rho C_p}$$

El simulador de Mathematica permite ver la participación de los distintos sumandos



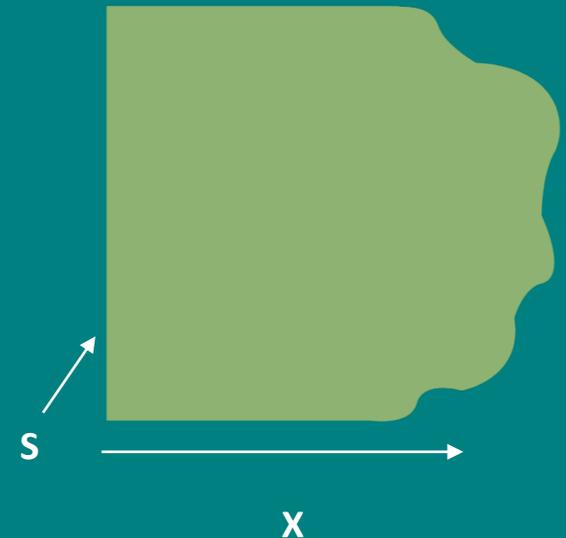


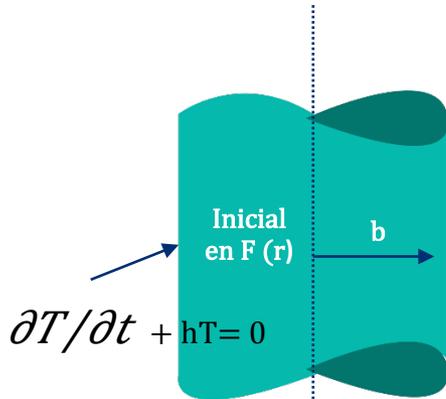
ANALÍTICO «A PIE» General

- Existe un número finito de funciones que son solución de la ecuación espacial (Eigen funciones) y se denotan como $X_n(x)$
- La ecuación temporal debe cumplir las condiciones iniciales un eigen valor $\lambda \downarrow n$
- La ecuación espacial debe cumplir las condiciones de frontera
- Existe por lo tanto un número infinito de productos $X_n(x) T_n(t)$ que son soluciones de la ecuación de difusión
- Existe un número infinito de valores de λ para los que se cumplen las condiciones de frontera
- La solución general es la suma infinita de todos los productos $X_n(x) T_n(t)$ multiplicados por una constante. Cada uno de esos valores se llama valor propio (Eigen value) y se denota λ_n

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n X_n(x) T_n(t)$$

- La solución particular se obtiene calculando $C_n \downarrow$ a partir de las condiciones iniciales





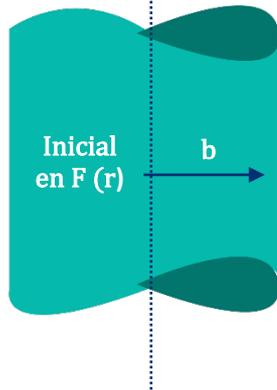
a) La frontera pierde calor por convección

b) La frontera se considera aislada

La solución es una suma de funciones propias (funciones de Bessel), multiplicadas por una exponencial.

$$T(r, t) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m e^{-\alpha \beta_m^2 t} R_0(\beta_m r)$$

Los valores de los Eigenvalores y los coeficientes de las funciones se obtienen a partir de las condiciones a la frontera e iniciales.



$$C_m = \frac{1}{N(\beta_m)} \int_0^b r R_0(\beta_m r) F(r) dr$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0$$

Donde $N(\beta_m)$ es: $N(\beta_m) = \int_0^b r R_0^2(\beta_m r) dr$

Sustituyendo:

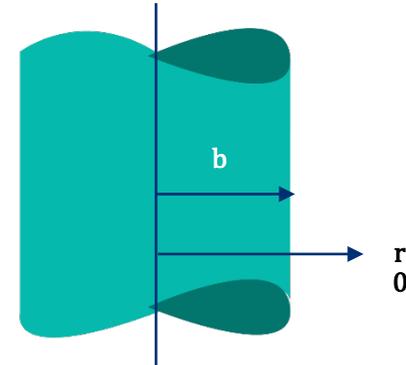
$$\sum_{m=1}^{\infty} e^{-\alpha \beta_m^2 t} \frac{J_0(\beta_m r)}{(\beta_m^2 + h^2) J_0(\beta_m b)}$$

ANALÍTICO «A PIE». GEOMETRÍA CILÍNDRICA

RELACIÓN CONDICIONES DE FRONTERA/SOLUCIONES

La función $R_v(\beta_m, r)$, la norma $N(\beta_m)$,
y los valores β_m de la ecuación diferencial

Sujeto a las condiciones límite



No	Condiciones límite De $r = b$	$R_v(\beta_m, r)$	$1/N(\beta_m)$	Valores propios β_m s resultados posibles de
1	$dR_v/dr + hR_v = 0$	$J_v(\beta_m r)$	$\frac{2/\int_0^b v(\beta_m r) dr}{\beta_m^2 m / b^2 (h^2 + \beta_m^2 m^2) - \gamma^2}$	$\beta_m J'_v(\beta_m b) + h J_v(\beta_m b) = 0$
2	$dR_v/dr = 0$	$J_v(\beta_m r)^*$	$\frac{2/\int_0^b v(\beta_m r) dr}{\beta_m^2 m / b^2 (h^2 + \beta_m^2 m^2) - \gamma^2}$	$\beta_m J'_v(\beta_m b) = 0^*$
		Para este caso particular $\beta_0 = 0$ el valor propio con $v=0$, entonces la función es $R_v = 1$ y la norma $1/N(\beta_0) = 2/\int_0^b v(\beta_0 r) dr = 2/\int_0^b v(0) dr = 2/\int_0^b 0 dr = \infty$		
3	$R_v = 0$	$J_v(\beta_m r)$	$2/\int_0^b v(\beta_m r) dr$	$J_v(\beta_m b) = 0$

Para la condición de frontera

$$dRy/dr + hR_y = 0$$

los índices β_m de las funciones de Bessel se obtienen al resolver la ecuación:

$$\beta_m J_m(\beta_m b) + h J_m(\beta_m b) = 0$$

El Excel usado en la práctica resolvía esa ecuación.

β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6
1.0919	4.0192	7.1256	10.2508	13.3832	16.5191

Los valores de β_m dependen del radio b y del coeficiente de transferencia de calor h

EJEMPLO

Convección en la frontera

EJEMPLO

- A diferencia de los índices de las funciones trigonométricas, las β_m no siempre son enteros.
- Otra condición a la frontera diferente, implica resolver una ecuación distinta para encontrar las β_m

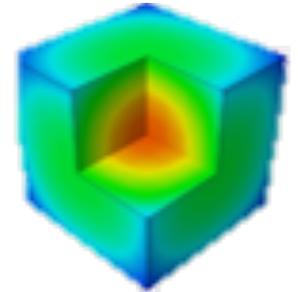
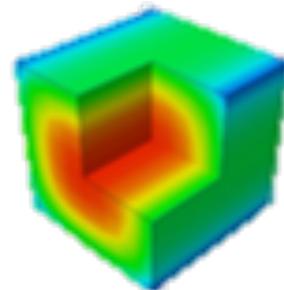
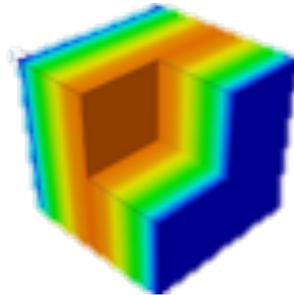
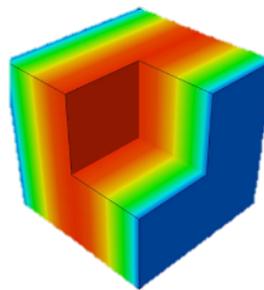
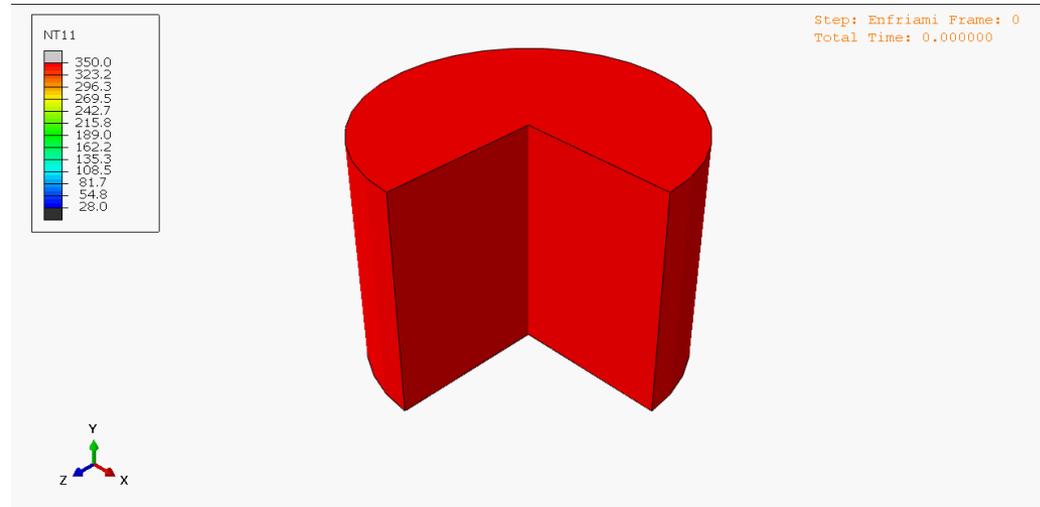


NUMÉRICO. ABAQUS

Cortesía
DR. BERNARDO
HERNÁNDEZ
MORALES

Departamento de
Ingeniería metalúrgica

Facultad de Química
UNAM

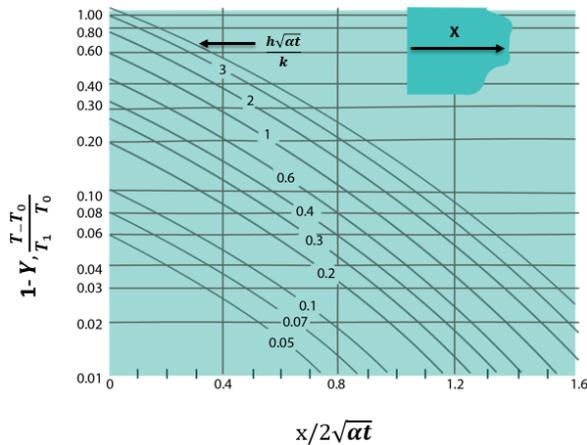
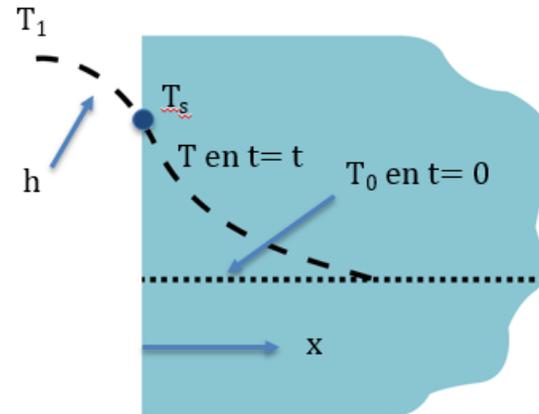


USO DE GRÁFICAS (sólido semi infinito)

La solución analítica es:

$$\frac{T - T_0}{T_1 - T_0} = 1 - Y = \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} - \exp \left[\frac{h\sqrt{\alpha t}}{k} \left(\frac{x}{\sqrt{\alpha t}} + \frac{h\sqrt{\alpha t}}{k} \right) \right] \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} + \frac{h}{k} \sqrt{\alpha t} \right)$$

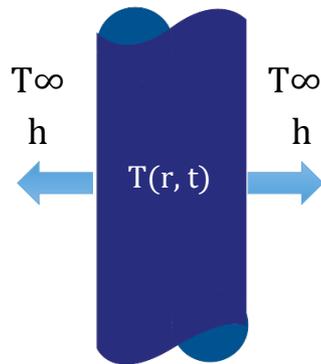
Se construyen gráficas con base en números adimensionales



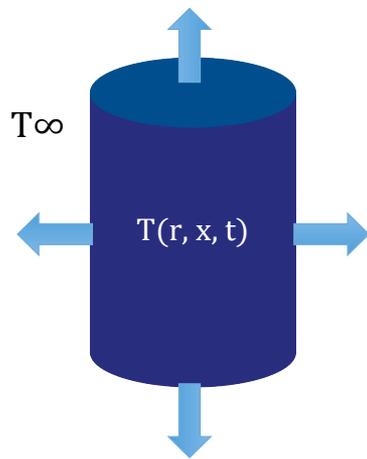
En clase se analizaron cuatro casos diferentes de condiciones a la frontera.

No existen todas las gráficas hay que interpolar

TRANSFERENCIA DE CALOR POR CONDUCCIÓN EN SISTEMAS MULTIDIMENSIONALES



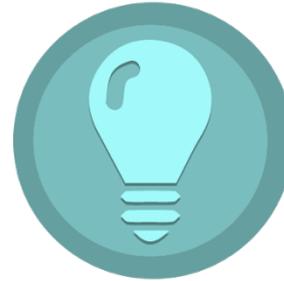
Cilindro largo



Las soluciones de problemas en una dimensión pueden usarse para construir soluciones de problemas de dos y tres dimensiones, usando un método de superposición multiplicativa.

Siempre y cuando el sólido no genere calor internamente, todas sus superficies estén expuestas al transporte convectivo del mismo fluido, a la misma temperatura y con el mismo coeficiente de transporte convectivo h

Solución generalizada



La solución puede generalizarse de la siguiente manera:

la solución para una geometría multidimensional es el producto de las soluciones de las geometrías uni-dimensionales cuya intersección forma el cuerpo multidimensional.

Por conveniencia las soluciones uni-dimensionales se denotan así:

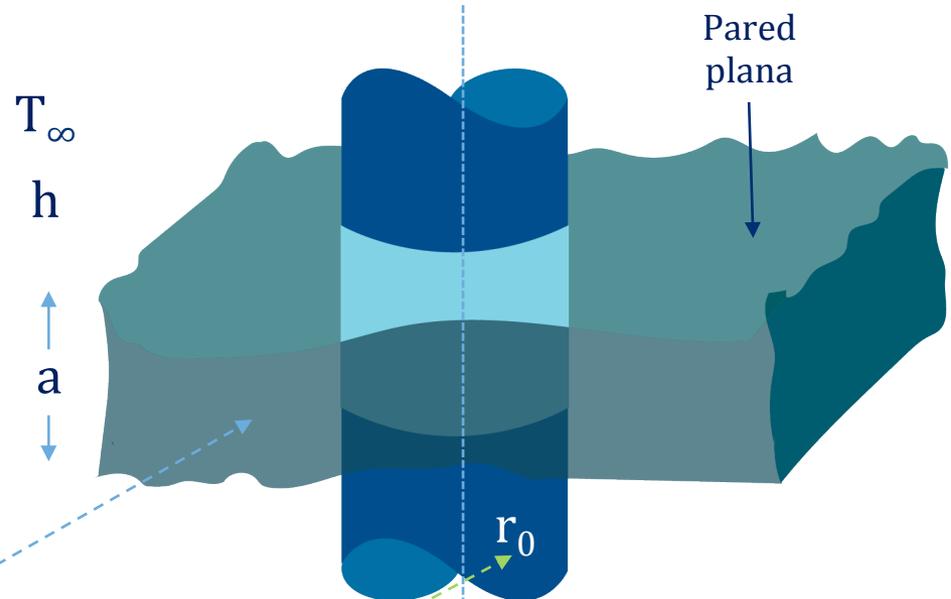
$$\theta_{\text{pared}}(x,t) = (T(x,t) - T_{\infty} / T_i - T_{\infty})$$

$$\theta_{\text{cilindro}}(r,t) = (T(r,t) - T_{\infty} / T_i - T_{\infty})$$

$$\theta_{\text{semi-inf}}(x,t) = (T(x,t) - T_{\infty} / T_i - T_{\infty})$$

CILINDRO CORTO

- Altura a y radio r_0
- Temperatura inicial T_i
- No hay generación de calor
- Tiempo: $t=0$
 - Convección T_∞
 - Coeficiente de transferencia h
- Solución

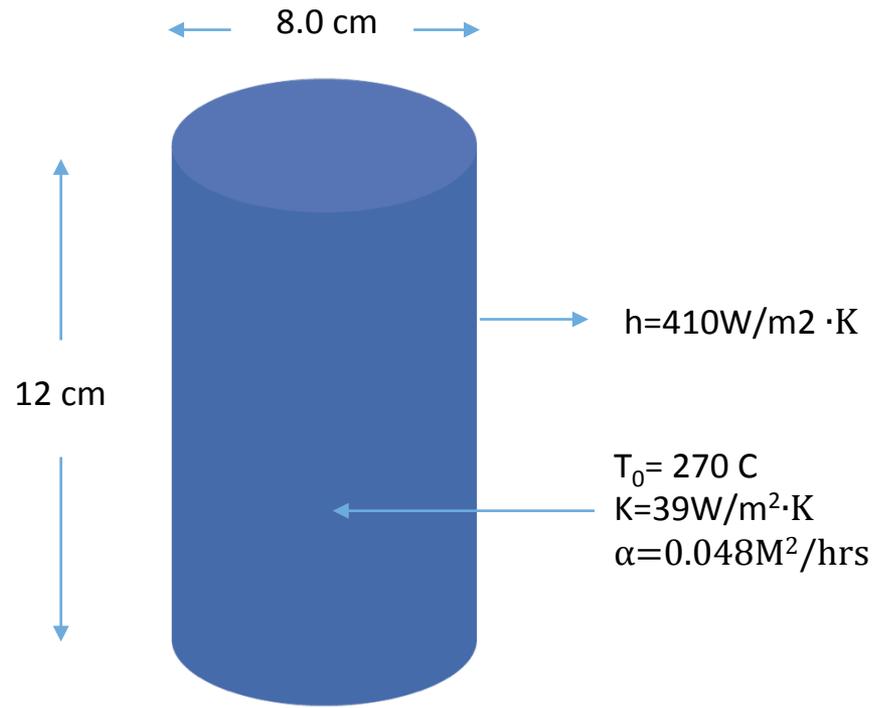


$$\left(\frac{T(r,x,t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} \right) = \left(\frac{T(x,t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} \right)$$

$$\times \left(\frac{T(r,t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} \right)$$

Un cilindro de 8.0 cm de diámetro exterior y 12 cm de longitud que se encuentra a una temperatura de 270 C se coloca en un ambiente convectivo ($h = 410 \text{ W/m}^2\text{K}$) a 50 C. Las propiedades del metal del que está hecho el cilindro son $\alpha = 0.048 \text{ m}^2/\text{hr}$ y $k = 39 \text{ W/m K}$.

Determine la temperatura en el centro del cilindro después de 5 minutos.



La conductividad térmica está relacionada con la conductividad eléctrica a través de la ley de Wiedemann- Franz.

$$\frac{k}{\sigma} = LT \quad L = 2.29 \times 10^{-9} \text{ Volts}^2 \text{ K}^{-2}$$

k = Conductividad térmica
 L = Número de Lorenz
 σ = Conductividad eléctrica

Por lo tanto una de ellas puede conocerse en función de la otra.

LEY DE WIEDEMANN-FRANZ



SOLUCIÓN

La solución de este caso multidimensional será el producto de las soluciones de un cilindro infinitamente largo y una placa (slab). Las siguientes láminas muestran la solución para estos dos casos:

Temperaturas transitorias adimensionales y flujo de calor para un cilindro largo

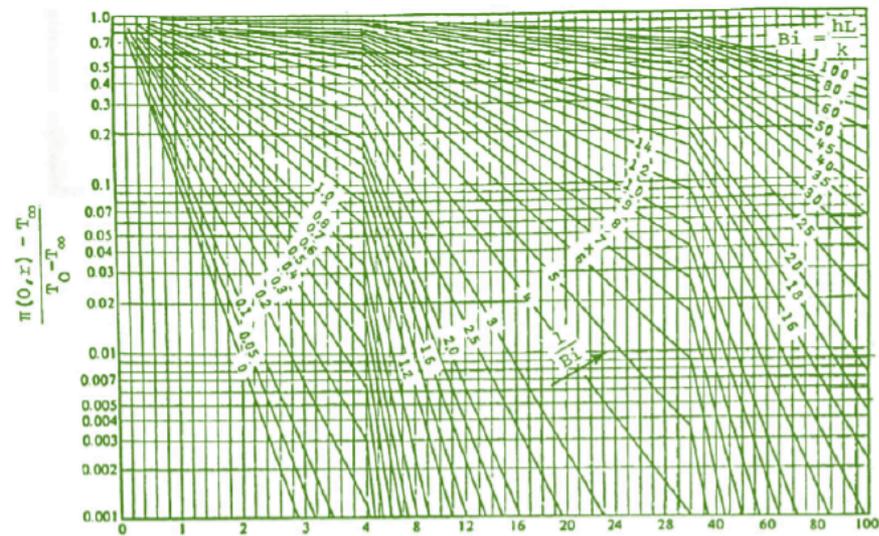
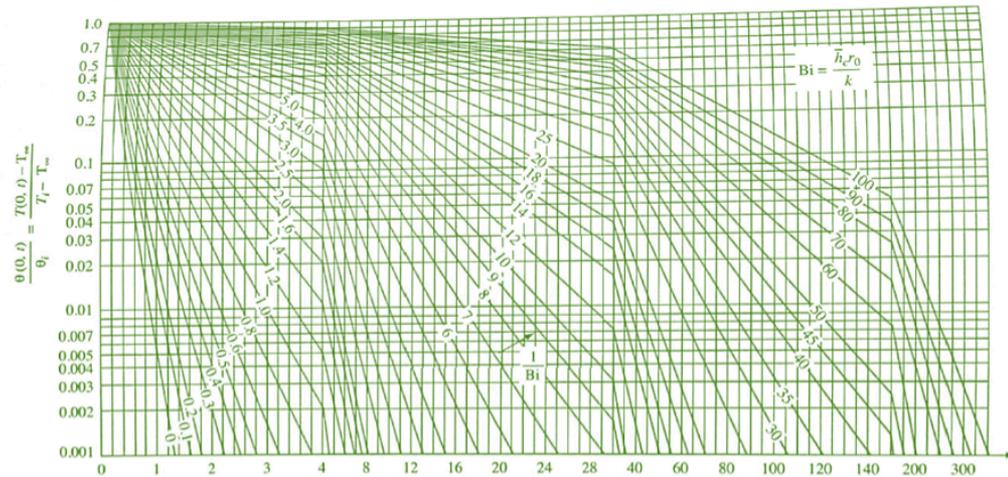


Figure (3)

$$\frac{\alpha t}{L^2} = Fo$$

Para el cilindro largo

$$B_1 = hr_0/2k$$

$$= (410)(0.04)/2(39)$$

$$= 0.21$$

$$1/2B_1 = 1/2(0.21) = 2.38$$

$$F_0 = \alpha\tau/r_0^2$$

$$= (0.048)(0.0833)/(0.04)^2$$

$$= 2.5$$

$$T(O,\tau) - T_\infty / T_0 - T_\infty = 0.145$$



Para la placa de espesor 2L

El numero de Biot esta dado por:

$$B_1 = hL/k$$

$$= \frac{(410)(0.06)}{39}$$

$$1/B_1 = 1/0.631$$

$$= 1.585$$

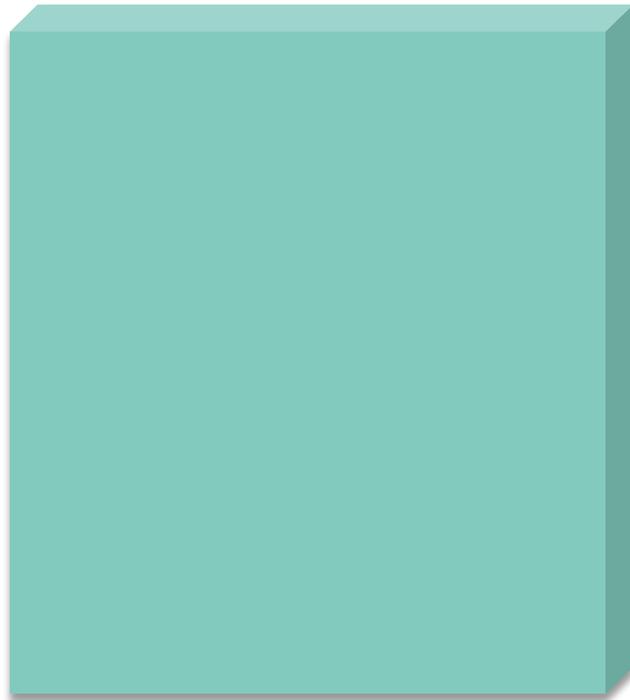
$$F_0 = hL/k$$

$$= \frac{(0.048)}{(0.0833)/(0.06)^2}$$

$$= 1.11$$

Por $\alpha\tau/L^2 = 1.11$ y $1/B_1 = 1.585$

$$S(0,\tau) = T(0,\tau) - T_\infty / T_0 - T_\infty$$

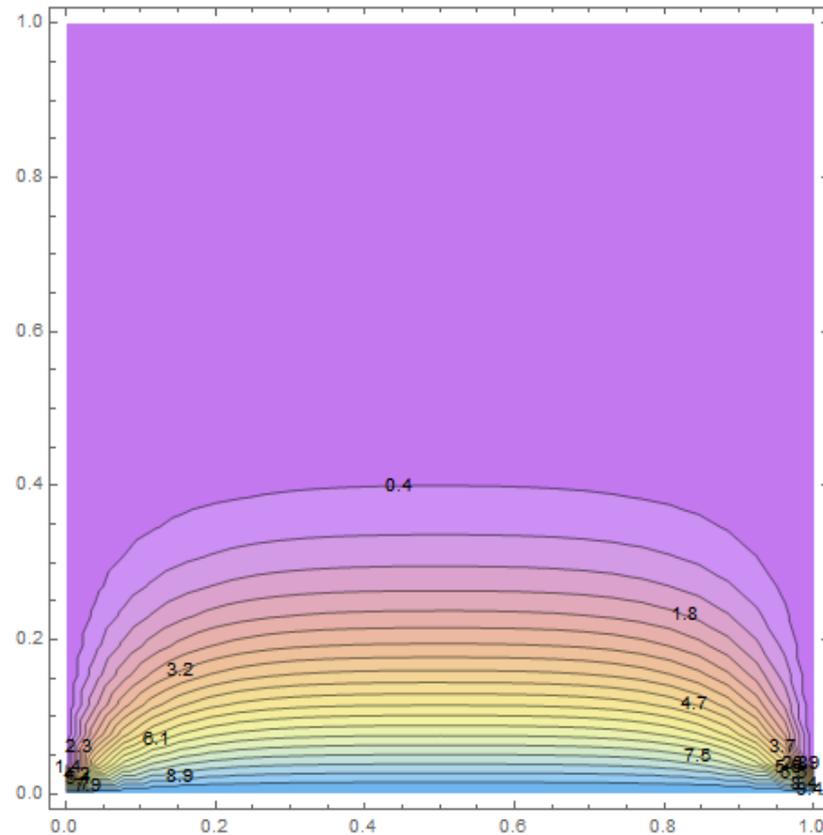




Combinando las soluciones



MATHEMATICA: PLACA BIDIMENSIONAL



$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

condición inicial $T(x, y, 0) = 0$

Con las siguientes condiciones de frontera

$$T(0, y, t) = 0 \quad T(x, 1, t) = 0 \quad T(x, y, 0) = 0$$

$$T(1, y, t) = 0 \quad T(x, 0, t) = 10$$

ECUACIÓN DE DIFUSIÓN EN COORDENADAS ESFÉRICAS

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T$$

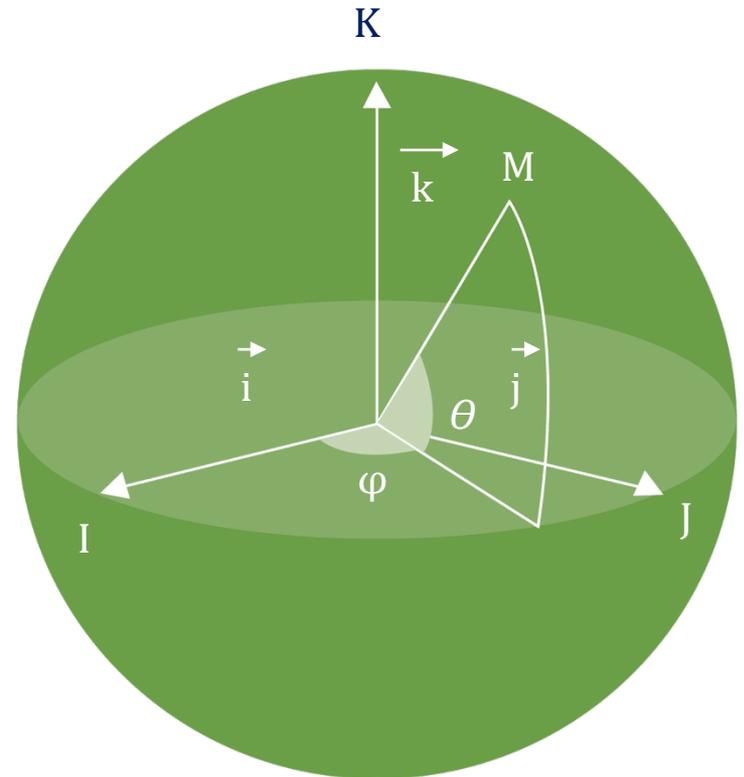
«Misma» ecuación

Pero en geometría esférica

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} \right) + \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T$$

Condiciones a la frontera.

- La frontera pierde calor por convección
- La frontera se considera aislada



1

PRIMER CAMBIO DE VARIABLE

Con el cambio de variable $\mu = \cos\theta$ $v = r^{1/2}T$

La ecuación se transforma en:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{1}{4} \frac{V}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \mu} [(1-\mu^2)$$

Al separar las variables, habrá tres ecuaciones espaciales, una para cada coordenada. Y otra más para la coordenada temporal

ECUACIONES SEPARADAS EN COORDENADAS ESFÉRICAS

NOMBRE	ECUACION	SOLUCIONES
	$d^2 \Phi(\phi)/d\phi^2 + m^2 \Phi(\phi) = 0$	$\Phi(\phi) = \text{Sen}(m \phi)$ $\Phi(\phi) = \text{Cos}(m \phi)$
BESSEL	$d^2 R/dr^2 + 1/r dR/dr + [\lambda^2 - (n+1/2)^2 1/r^2] R = 0$	$R(r) = J_{n+1/2}(\lambda r)$ $R(r) = Y_{n+1/2}(\lambda r)$
ASOCIADA DE LEGENDRE	$d/d\mu [(1-\mu^2)dM/d\mu] + [n(n+1) - m^2/(1-\mu^2)] M = 0$	$M(\mu) = P_{n,m}(\mu)$ $M(\mu) = Q_{n,m}(\mu)$
TEMPORAL	$d\Gamma(t)/dt + \alpha \lambda^2 \Gamma(t) = 0$	$\Gamma(t) = e^{-\alpha \lambda^2 t}$

Ejemplo

Dependencia en r y t.

Una esfera de radio $r = b$ tiene una temperatura inicial descrita por la función $F(r)$ y para tiempos $t > 0$ la frontera $r = b$ disipa calor por convección hacia el medio ambiente que se encuentra a 0 K. Encontrar $T(r, t)$ sobre la esfera para $t > 0$

En este caso la ecuación de transferencia toma la forma:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad 0 < r < b, t > 0$$

Con la condición de frontera:

$$\frac{\partial T}{\partial r} + hT = 0 \quad r = b, \quad t > 0$$

Y condición inicial:

$$T = F(r) \quad t = 0 \quad 0 < r < b$$

Solución de la ecuación

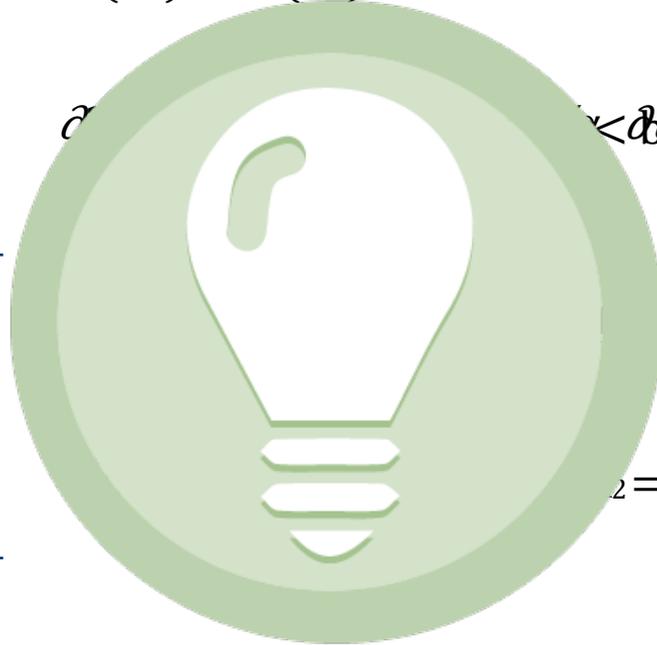
Usando la transformación:

$$U(r,t) = rT(r,t)$$

La ecuación toma la forma:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} = \frac{\partial U}{\partial t} \neq 0$$

Con las condiciones
a la frontera:



$$U = 0, \quad t > 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial r} = 0, \quad t > 0$$

condición inicial

$$U = rF(r)$$

$$t = 0, \quad a < r < b$$

2

NUEVO CAMBIO DE VARIABLE

Realizamos un nuevo cambio de variable $x=r-a$

Con lo que la ecuación toma la forma

$$\partial^2 U / \partial r^2 + (a+x)g(x+a)/k = 1/\alpha \partial U / \partial t, \quad t > 0$$

y las condiciones a la Frontera e inicial son:

$$-\partial U / \partial r + K_1 U = af_1 \quad x = 0, \quad t > 0$$

$$\partial U / \partial r + K_2 U = af_2 \quad x = L, \quad t > 0$$

$$U = (x+a) F(x+a) \quad t = 0, \quad 0 < x < L$$

SOLUCIÓN

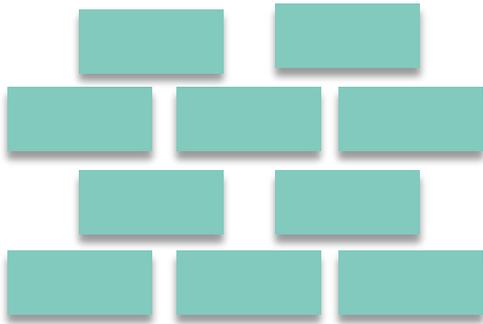


Este problema es idéntico al de una placa de espesor L , que puede ser resuelto con las técnicas ya estudiadas anteriormente y cuya solución es:

$$R(\beta_m r) = \beta_m \cos \beta_m (r-a) + K_1 \sin \beta_m (r-a)$$

Con $K_1 = \frac{h_1 + 1}{a}$ y $\tan \beta_m (b-a) = \beta_m (K_1 + K_2) / \beta_m^2 @m -$
 a

CONSTRUCCIÓN DE LA SOLUCIÓN COMPLETA



$$T(r, t) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m e^{-\alpha \beta_m^2 t} R_0(\beta_m r)$$

Solución de la Ec Temporal

Solución de la Ec espacial

El valor de las C_m se determinará a partir de las condiciones de frontera e iniciales: $T(r, 0) = F(r) = T_0$

$$C_m = \frac{1}{N(\beta_m)} \int_0^b r R_0(\beta_m r) F(r) dr$$

Donde $N(\beta_m)$ es:

$$N(\beta_m) = \int_0^b r R_0^2(\beta_m r) dr$$

ESFERA AISLADA

Cuando ambas fronteras $r = a$ y $r = b$ están aisladas $h_1 = h_2 = 0$. En ese caso $\beta_0 = 0$ también es un *eigenvalor*. En ese caso el término:

$$\frac{3}{b^3 - a^3} \int_a^b r^2 F(r) dr$$

Debe ser agregado a la solución.

Este término implica que una vez transcurrido el estado transitorio, la temperatura del estado estacionario en el medio, será el promedio de la distribución inicial de temperatura $F(r)$, sobre el volumen de la esfera aislada,

SOLUCIONES UNI-DIMENSIONALES

Geometría	Solución	λ_n 'S
Pared	$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \sin \lambda_n}{2\lambda_n + \sin(2\lambda_n)} e^{-\lambda_n^2 \tau} \cos(\lambda_n x/L)$	$1 - \lambda_n \cot \lambda_n = \text{Bi}$
Cilindro	$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 J_1(\lambda_n)}{\lambda_n J_0^2(\lambda_n) + J_1^2(\lambda_n)} e^{-\lambda_n^2 \tau} J_0(\lambda_n r/r_0)$	$\lambda_n \frac{J_1(\lambda_n)}{J_0(\lambda_n)} = \text{Bi}$
Esfera	$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(\sin \lambda_n - \lambda_n \cos \lambda_n)}{2\lambda_n - \sin(2\lambda_n)} e^{-\lambda_n^2 \tau} \frac{\sin(\lambda_n x/L)}{\lambda_n x/L}$	$1 - \lambda_n \cot \lambda_n = \text{Bi}$

ACTIVIDAD

Desarrollar los primeros tres términos de cada una de las serie de la diapositiva anterior.

