DGTIC

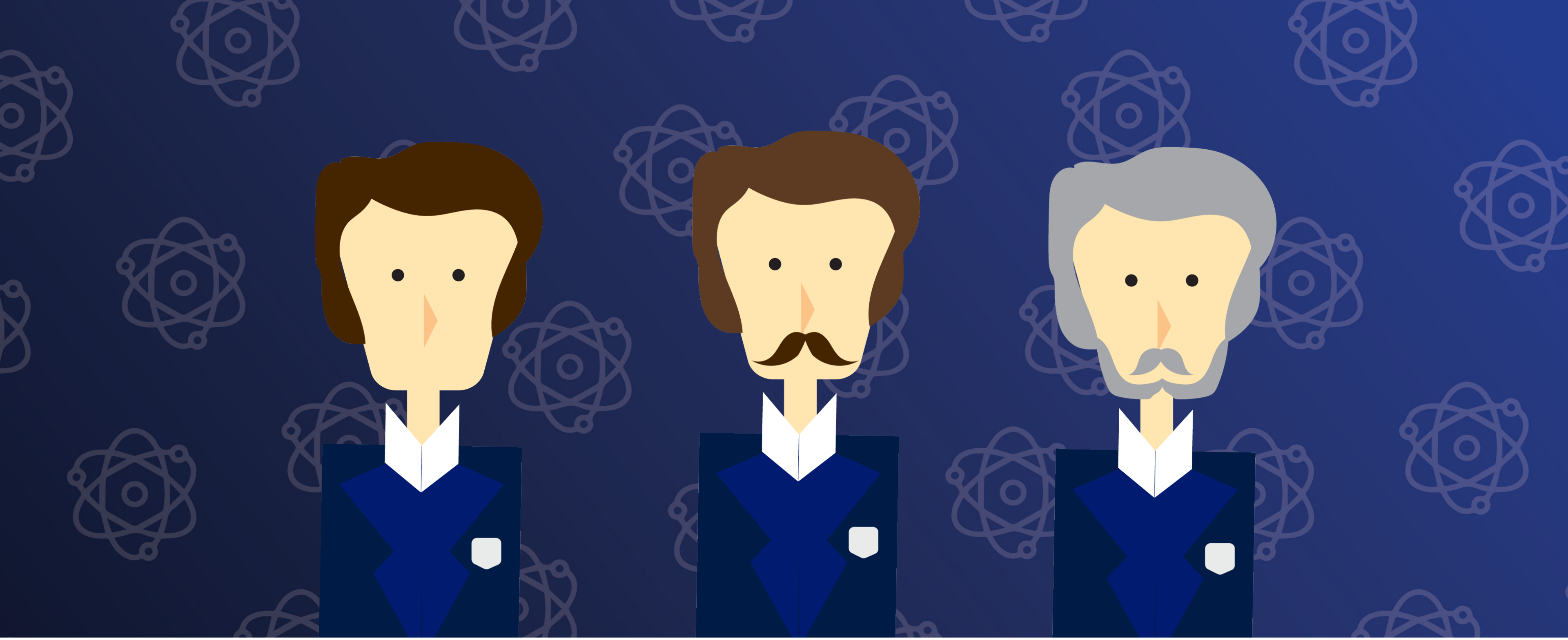
Dirección General de Cómputo y de Tecnologías de Información y Comunicación

Facultad de Química

CURSO:
TRANSFERENCIA DE ENERGÍA

Doctor Rafael Fernández Flores

Trabajo realizado con el apoyo del
Programa UNAM-DGAPA-PAPIME
PE110517

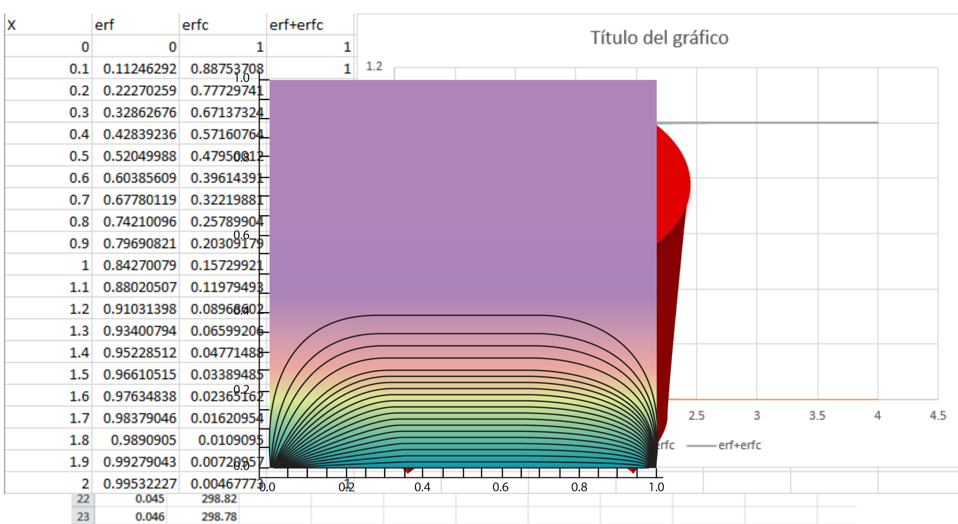


TRANSFERENCIA DE CALOR EN ESTADO NO ESTACIONARIO

ANTECEDENTES Y SOLUCIÓN EN EL CASO DE GRADIENTE CERO

PROBLEMA

¿Cómo se obtiene el perfil de temperaturas, cuando hay dependencia del tiempo?



OBJETIVOS

1. Entender la ecuación de difusión como un caso límite de la ecuación general de balance de energía.
2. Conocer el criterio para determinar en qué casos se puede considerar una transferencia de calor “instantánea”.
3. Resolver problemas en los cuáles se puede considerar que no existe un gradiente de temperatura..
4. Conocer diferentes métodos analíticos y computacionales para la solución de la ecuación de calor.
5. Resolver problemas de conducción de calor en estado no estacionario en geometría cartesiana.

MENÚ

- **ANTECEDENTES:**
  - Perfiles de Temperatura
  - Ecuaciones de balance para un fluido en movimiento.
  - Enfoques Euleriano y Lagrangiano
  - Concepto de campo y derivada material (total)
  - Ecuación de difusión
- **CONDUCTIVIDAD INFINITA. Ejemplo**
- **CONDUCTIVIDAD FINITA**
- **(con gradientes)**
- **ECUACIÓN DE DIFUSIÓN (condiciones a la frontera y geometría)**
- **MÉTODOS DE RESOLUCIÓN**

ANTECEDENTES

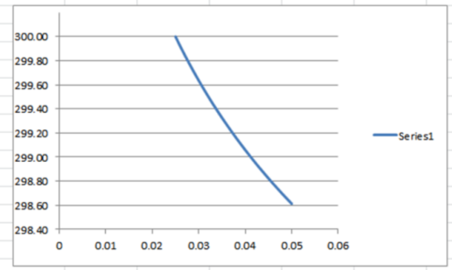
•. Hasta esta parte del curso, los perfiles de temperatura que hemos visto sólo dependen de la posición y no varían con el tiempo.

Eso se consigue gracias a que continuamente se proporciona energía al sistema (calefactor, por ejemplo) para compensar la pérdida.

Lo “natural” sería que los perfiles cambiaran con el tiempo.
Es decir T (x, t)

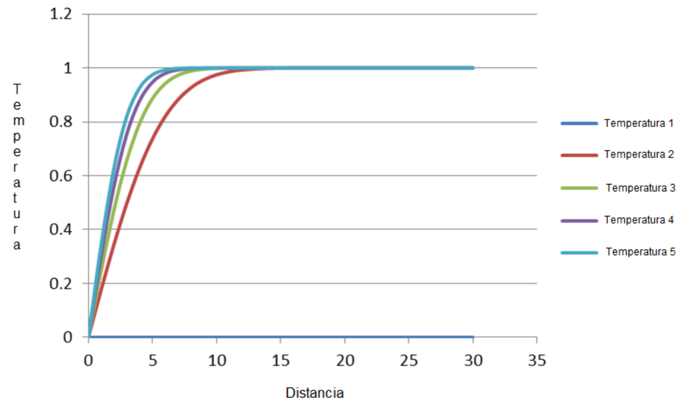
B2 =C$2-D$2*E$2*LN(A2/D$2)/F$2

	A	B	C	D	E	F
1	r	T	T_0	r_0	q_o	K_{01}
2	0.025	300.00	300	0.025	24	0.3
3	0.026	299.92				
4	0.027	299.85				
5	0.028	299.77				
6	0.029	299.70				
7	0.03	299.64				
8	0.031	299.57				
9	0.032	299.51				
10	0.033	299.44				
11	0.034	299.39				
12	0.035	299.33				
13	0.036	299.27				
14	0.037	299.22				
15	0.038	299.16				
16	0.039	299.11				
17	0.04	299.06				
18	0.041	299.01				
19	0.042	298.96				
20	0.043	298.92				
21	0.044	298.87				
22	0.045	298.82				
23	0.046	298.78				

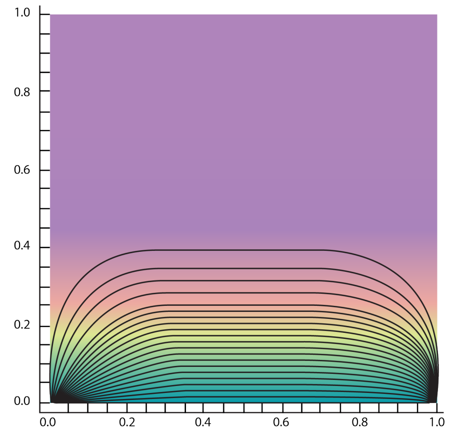


PERFILES DE TEMPERATURA

EVOLUCIÓN TEMPORAL DEL PERFIL DE TEMPERATURAS



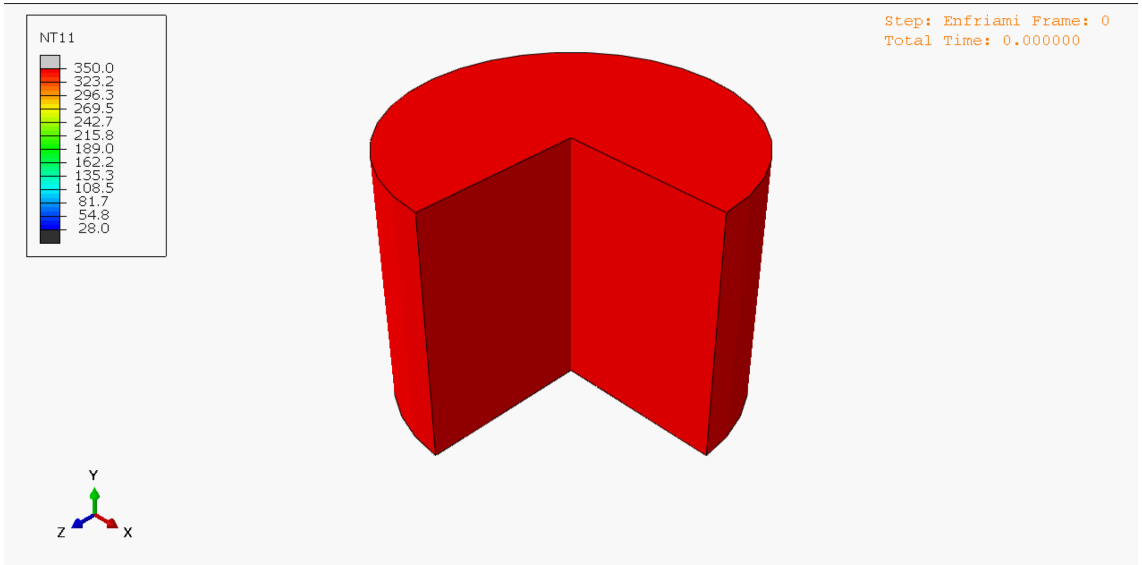
1 dimensión



2 dimensiones

3 dimensiones

Visualización del proceso de enfriamineto mediante solución numérica usando Abaqus



Tomado de:
https://onedrive.live.com/?authkey=!AMZMy9Evl2q0Kzo&id=7EDB1EC9396CB4A3!4111&cid=7EDB1EC9396CB4A3

T (x,t) puede obtenerse experimentalmente.

Cuando T no depende del tiempo, lo pudimos conocer a través de una ecuación.

$$-k_{01} \; dT01/dx = q_0$$

¿Existe una ecuación para conocer T cuando depende del tiempo?

La respuesta corta es sí:
Se llama **la ecuación de difusión**.

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = k\nabla^2 T$$

DETERMINACIÓN DEL PERFIL DE TEMPERATURAS

RECORDANDO

ECUACIONES DE BALANCE PARA UN FLUJO EN MOVIMIENTO

(partícula y medio continuo)

FISICA DE LA PARTICULA	MEDIO CONTINUO
Conservación de la masa	$\partial\rho/\partial t + \nabla\cdot (\rho u)=0$
Conservación de la energía	$\rho C_p\, DT/\, Dt = k\nabla^2 T - T\, (\partial p/\partial T\,)_p\, (\nabla\cdot v\,) + \mu\phi_\zeta$
Conservación del momento	$\rho\, Du/Dt = -\, \nabla P - [\nabla\cdot\tau\,] + \rho g g$

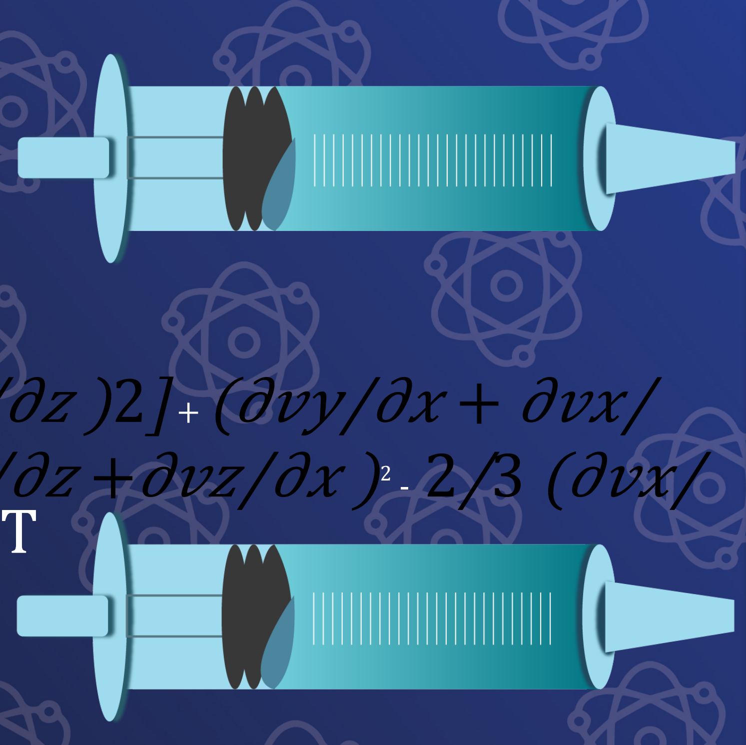
Cuando el fluido es incompresible,
se anula el término:

$$T\,(\partial \rho/\partial t)_\rho\,(\nabla\cdot v)$$

Cuando no hay fuerzas de fricción
se anula el término: $\mu\phi_\zeta$

$$\Phi_\zeta = 2[(\partial vx/\partial x)^2+(\partial vy/\partial y)^2+(\partial vz/\partial z)^2] + (\partial vy/\partial x + \partial vx/\partial y)^2 + (\partial vz/\partial y) + (\partial vy/\partial z)^2 + (\partial vx/\partial z + \partial vz/\partial x)^2 - 2/3\,(\partial vx/\partial x + \partial vy/\partial y + \partial vz/\partial z)^2$$

Y la ecuación general de balance de energía se escribe: $\rho C_p\, DT/Dt = k\nabla^2 T$



En el caso de transporte en una sola dimensión, toma la forma: $\partial T/\partial t = \alpha\, \partial^2 T/\partial x^2$

$(\alpha = k/\rho C_p)$

De manera adimensional: $\partial Y/\partial t = \alpha'\, \partial^2 Y/\partial x^2$ $\quad Y = \dfrac{T_1 - T}{T_1 - T_0}$

FLUIDO INCOMPRESIBLE, NO VISCOSO Y UNIDIMENSIONAL

$C_p = 1/m \; dq/dT$ $\quad dq = C_p \rho V dT$

$dq = hA(T\infty - T)dt = C_p \rho V dT$

$\int_{T=T0}^{T=T} dT/(T\infty - T) = hA/(C_p \rho V) \int_{t=0}^{t=t} dt$

$= e^{-(hA/C_p \rho V)t}$

Velocidad de enfriamiento

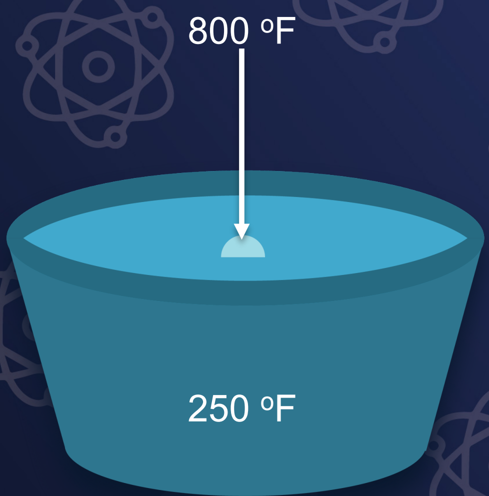
$$\frac{dT}{dt} = -(T_0 - T_\infty)(h\,A/c_p\,\rho V)e^{-(hA/c_p\rho V)t}$$

Criterio de validez de la aproximación de “gradiente cero”

$$N_{Bi} = \frac{hx_1}{k} < 0.1$$

N_{Bi} es el Número de Biot

“CONDUCTIVIDAD INFINITA” (GRADIENTE CERO)



Una esfera de acero de radio 1 pulgada con temperatura inicial de 800 ºF se sumerge en un medio a 250 ºF. ¿Cuál es la temperatura de la esfera después de 1 hora? si h= 2.0 Btu/hr. Ft ^{2} ^{o} F

EJEMPLO

SOLUCIÓN

$$x_1 = \frac{V}{A} = \frac{r}{3} = \frac{\frac{1}{12}}{3} = \frac{1}{36} pie \qquad = \frac{2.54}{100 \times 3} = 8.47 \times 10^{-3} m$$

$$N_{Bi} = \frac{h x_1}{k} = \frac{2\frac{1}{36}}{25} = 0.00222 \qquad N_{Bi} = \frac{(11.36)(8.47 \times 10^{-3})}{43.3} = 0.00222$$

$$\frac{hA}{c_p \rho V} = \frac{2}{(0.11)(490)(\frac{1}{36})} = 1.335\ hr^{-1} \qquad \frac{hA}{c_p \rho V} = \frac{11.36}{(0.4606 \times 1000)(7849)(8.47 \times 10^{-3})}$$

$$= 3.71 \times 10^{-4} s^{-1} (1.335\, hr^{-1})$$

$$\frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \frac{T - 250°F}{800 - 250} = e^{-(hA/c_p \rho V)t} = e^{-(1.335)(1.0)} \quad T = 395°F \qquad \frac{T - 394.3K}{699.9 - 394.3} = e^{-(3.71 \times 10^{-4})(3600)} \qquad T = 474.9\ K$$

ACTIVIDADES

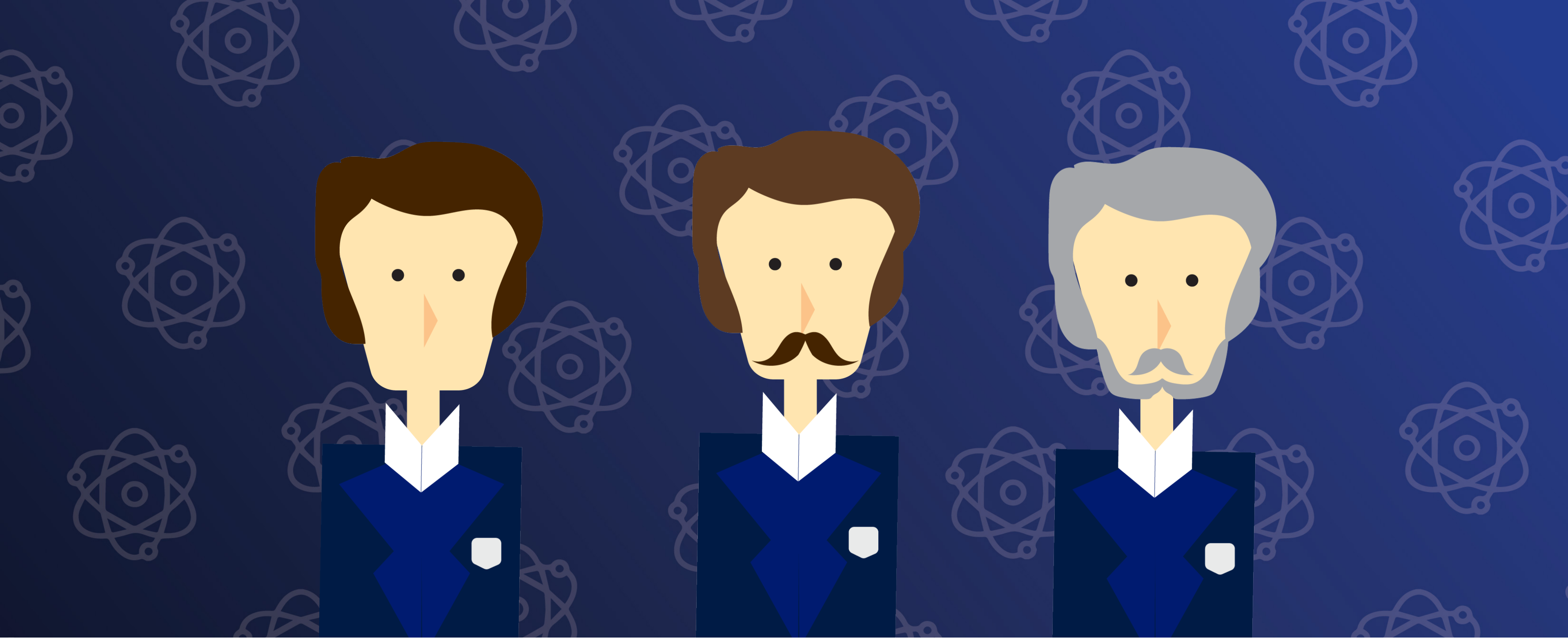
Repetir el mismo ejercicio para diferentes geometrías (diferentes x_1 y materiales (diferentes k).

Den ejemplos de materiales para los que no aplique la aproximación de gradiente cero.

ACTIVIDADES

Usar el simulador para que los alumnos calculen el área de su piel. Con ese dato, el de su volumen y el de la densidad promedio del cuerpo humano calcular su número de biot.

2.Usando la aproximación de gradiente cero calcular cuánto tiempo tardarían en llegar a una temperatura de 35 grados si cayeran al mar a 4 grados.



TRANSFERENCIA DE CALOR EN ESTADO NO ESTACIONARIO

SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE DIFUSIÓN EN COORDENADAS CARTESIANAS

CONDUCTIVIDAD FINITA
(EXISTENCIA DE GRADIENTES)

Si k no es “infinita”, la ecuación de difusión describe la conducción de calor en estado no estacionario, cuando no hay fuentes internas de generación de calor.

$$\partial T/\partial t = \alpha\nabla^2 T$$

Donde α, la difusividad térmica, es el cociente $k/\rho C_p$

- Esta ecuación, escrita dimensional o adimensionalmente, representa una gran familia de fenómenos
- Para aplicarla a la solución de un caso particular es necesario fijar:
    - La geometría (Rectangular, cilíndrica, 1D, 2D…)
    - Las condiciones iniciales y de frontera que lo describen.

MÉTODOS DE RESOLUCIÓN

VENTAJAS Y DESVENTAJAS

MÉTODOS DE RESOLUCIÓN

VENTAJAS Y DESVENTAJAS

MÉTODO	VENTAJAS	DESVENTAJAS
Analítico Separación de variables. «A pie»:	Es “exacto”	Sólo aplica a unas pocas geometrías simples.
Analítico computacional. Mathematica, Maple	Es un método análitico	Requiere una infraestructura de cómputo.
Numérico: Diferencias finitas y elemento finito.	Existen muchos códigos libres ya programados (Fortran, C, etc.) para los principales casos o softwers comerciales como Abaqus.	Como usuarios se procede “a ciegas en los programas comerciales”, o bien hay que aprender métodos numéricos y a programar para los de código abierto.

MÉTODOS DE RESOLUCIÓN

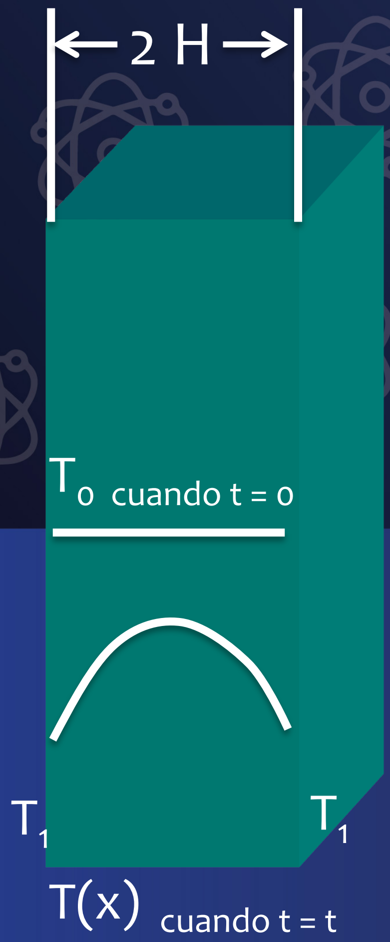
VENTAJAS Y DESVENTAJAS

MÉTODO	VENTAJAS	DESVENTAJAS
Tablas y gráficas. (Geankoplis, Bird, Kreith…)	Son muy accesibles Prácticamente no hay que hacer cálculos	No son muy precisas. Hay que encontrar la que corresponde al caso particular.
Excel	Permite programar el algoritmo de diferencias o elemento finito. Permite graficar soluciones obtenidas analíticamente.	No es un método de cálculo.

Una placa de espesor $2H$ que está a una temperatura T_0

Se coloca entre dos planchas a temperatura T_1

Encontrar el perfil de temperatura $T(x)$ para cualquier tiempo t, posterior.



La Ecuación es $\partial T/\partial t = \alpha \partial 2T/\partial x2$

con $\alpha = k / \rho C_p$

La Condición Inicial: $T = T_0$ en $t = 0$ y $x = x$

La Condición en la frontera Izquierda:
$T = T_1$ en $t = t$ y $x = 0$

La Condición en la frontera derecha:
$T = T_1$ en $t = t$ y $x = 2H$

EJEMPLO DE SOLUCIÓN ANALÍTICA «A PIE». PLACA DE ESPESOR 2H

SEPARACIÓN DE VARIABLES

Se propone una solución de la forma:

$$T\,(x, t) = X(x)\,\tau\,(t)$$

Se realiza la derivada temporal:

$$\partial T/\partial t = X(x)\, d\tau/dt$$

Se realiza la doble derivada espacial:

$$\partial 2T/\partial x2 = \tau(t)\, d2X(x)/dx2$$

Se sustituye dentro de la ecuación de difusión:

$$1/\alpha\ X(x)\, d\tau/dt = \tau\, d2X2/dx2$$

SEPARACIÓN DE VARIABLES

Se divide entre $T(x,t) = X(x)\,\tau(t)$,

con lo que las variables quedan separadas

$$1/\alpha \;\; 1/\tau(t) \;\; d\tau/dt = 1/X(x) \;\; d2X/dx2$$

Como ambas ecuaciones dependen de variables diferentes, deben ser -ambas- iguales a una constante λ:

$$1/\alpha \;\; 1/\tau(t) \;\; d\tau/dt = \lambda = 1/X(x) \;\; d2X/dx2$$

Lo que lleva al sistema de ecuaciones:

$$d\tau/dt = \lambda\alpha\tau(t)$$

$$d2X/dx2 = \lambda X(x)$$

USANDO LAS CONDICIONES A LA FRONTERA

Para la parte espacial debe tratarse de una solución ondulatoria, que con las condiciones de frontera lleva a:

$$X_n = \mathrm{Sen}(\lambda n/2H)x \qquad \lambda_n = (2n+1) \qquad n = 0,1,2\ldots$$

La solución de la parte temporal es una exponencial

$$\tau_n(t) = e^{-(\lambda n/2H\pi)^2 \alpha t}$$

Con lo cual:

$$X_n\,\tau_n(t) = \mathrm{Sen}(\lambda n/2H)xe - (\lambda n/2H\pi)2\alpha t$$

El producto:

$$X_n\,\tau_n(t) = \underbrace{\mathrm{Sen}(\lambda n/2H\,)x}\underbrace{e-(\lambda n/2H\;\pi)}2\,\alpha t$$

es entonces una familia de soluciones de la ecuación $\partial T/\partial t\ =\alpha\ \partial 2T/\partial x2$ etiquetadas por el parámetro n

La solución general será una combinación lineal infinita de ese tipo de productos:

$$\sum\uparrow An\,Xn\,\tau n(t)\ = \sum\uparrow An\,\mathrm{sen}(\lambda n/2H\,)\ \ x\,e^{-}(\lambda n/2H\ \pi)^{2}\,\alpha t$$

SOLUCIÓN GENERAL

SOLUCIÓN PARTICULAR

Los valores de las condiciones iniciales y a la frontera de cada problema particular sirven para fijar los valores de las constantes, con lo cual, en este caso:

La solución particular es:

$$T1-T/T1-T0 = 4/\pi \ (1/1 \ exp-12\pi 2at/4h2 \ sen1\pi x/2h+1/3 \ exp-32\pi 2at/4h2 \ sen3\pi x/2h+1/5 \ exp-52\pi 2at/4h2 \ sen \ 5\pi x/2h+\ldots)$$

COMENTARIOS

- Una ecuación en derivadas parciales de 2do orden se transformó en un sistema de dos ecuaciones ordinarias.
- La ecuación temporal debe cumplir las condiciones iniciales.
- La ecuación espacial debe cumplir las condicione de frontera.
- Existe un número infinito de valores de λ para los que se cumplen las condiciones de frontera.
- Cada uno de esos valores se llama valor propio (*Eigen* valor) y se denota λ_n
- Existe un número infinito de funciones que son solución de la ecuación Espacial (*Eigen* funciones) y se denotan por $X_n(x)$.

COMENTARIOS

- Cada una de las *eigen* funciones $X_n(x)$ está asociada a un *eigen* valor λ_n.
- Existe por lo tanto un número infinito de productos $X_n(x)$ $\tau_n(t)$ que son soluciones de la ecuación de difusión.
- La solución general es la suma infinita de todos los productos $X_n(x)$ $\tau_n(t)$ multiplicados por una constante.

  $$T(x,t) = \sum C_n X_n(x)\tau_n(t)$$

- La solución particular se obtiene calculando C_n a partir de las condiciones iniciales.

OTRO EJEMPLO DE SOLUCIÓN ANALÍTICA «A PIE»: SÓLIDO SEMI-INFINITO

La ecuación otra vez es la misma:

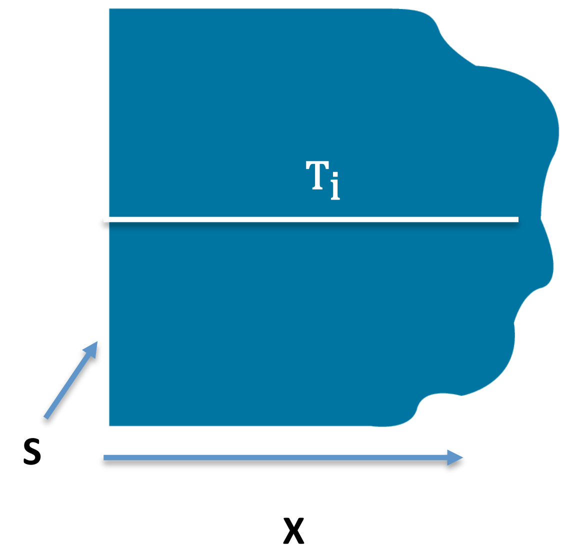
$$\partial T\ /\partial t = \alpha\ \partial 2 T/\partial X2$$

Pero diferentes condiciones iniciales:

$T = T_i$ en $t=0$

y de frontera:
$T_x\ (0,t) = T_s$

$T_x\ (x\rightarrow\infty\ ,\ t) = T_i$



VARIABLE DE SIMILARIDAD. TEMPERATURA CONSTANTE EN LA SUPERFICIE

En este caso no funciona el método de separación de variables directamente, debido a que el medio es semi infinito, por lo tanto es necesario otro enfoque, el de la variable de similaridad. Hacemos el cambio de variable:

$$\eta = x / \sqrt{4 \alpha t}$$

Con lo cual la ecuación diferencial en derivadas parciales se convierte en una ecuación ordinaria:

$$d2T/d\eta 2 = -2\eta \, dT/d\eta$$

Con las condiciones
a la frontera.

$$T(0) = T_s \quad y \quad T(\eta \to \infty) = T_i$$

Y condición inicial: $T(x,0) = T_i$

SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN

Hacemos el cambio de variable: $w = dT/d\eta$

$$dw/d\eta = -2\eta w \rightarrow dw/w = -2\eta d\eta \rightarrow \mathrm{In}\, w = -\eta^2 + C_0 \rightarrow w = C_1 e^{-\eta^2}$$

Con $C_1 = \ln\eta\, C_0$

Regresando a la variable w:

$$T = C_1 \int_0^{\eta} e^{-\eta^2}\, du + C_2$$

$\eta = 0$ lleva a $C_2 = T_s$

$\eta \rightarrow \infty$ lleva a:

$$T_i = C_1 \int_0^{x} e^{-u^2}\, du + C_2 = C_1 \sqrt{\pi}/2 + T_s \rightarrow C_1 = 2(T_i - T_s)/\sqrt{\pi}$$

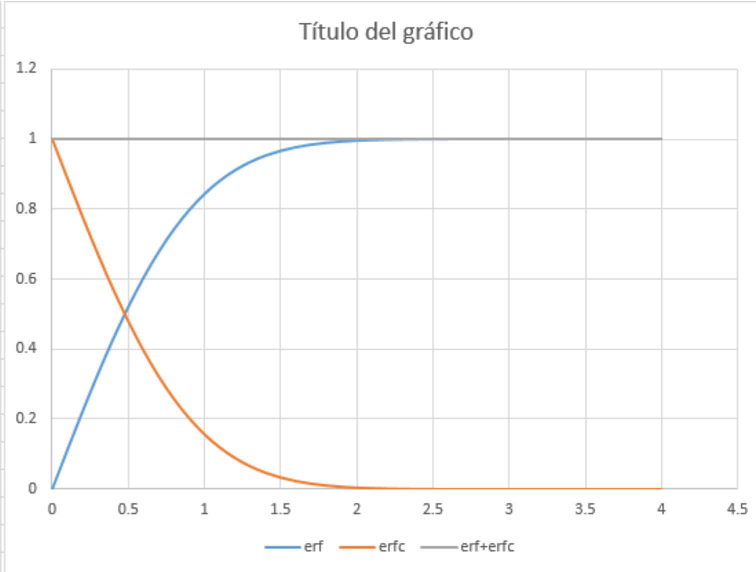
Sustituyendo

$$\frac{T - T_s}{T_i - T_s} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} e^{-u^2}\, du = \mathrm{erf}(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} e^{-u^2}\, du$$

CONDICIONES A LA FRONTERA

FUNCIÓN ERROR (erf) Y FUNCIÓN ERROR COMPLEMENTARIA (erfc)

X	erf	erfc	erf+erfc
0	0	1	1
0.1	0.11246292	0.88753708	1
0.2	0.22270259	0.77729741	1
0.3	0.32862676	0.67137324	1
0.4	0.42839236	0.57160764	1
0.5	0.52049988	0.47950012	1
0.6	0.60385609	0.39614391	1
0.7	0.67780119	0.32219881	1
0.8	0.74210096	0.25789904	1
0.9	0.79690821	0.20309179	1
1	0.84270079	0.15729921	1
1.1	0.88020507	0.11979493	1
1.2	0.91031398	0.08968602	1
1.3	0.93400794	0.06599206	1
1.4	0.95228512	0.04771488	1
1.5	0.96610515	0.03389485	1
1.6	0.97634838	0.02365162	1
1.7	0.98379046	0.01620954	1
1.8	0.9890905	0.0109095	1
1.9	0.99279043	0.00720957	1
2	0.99532227	0.00467773	1

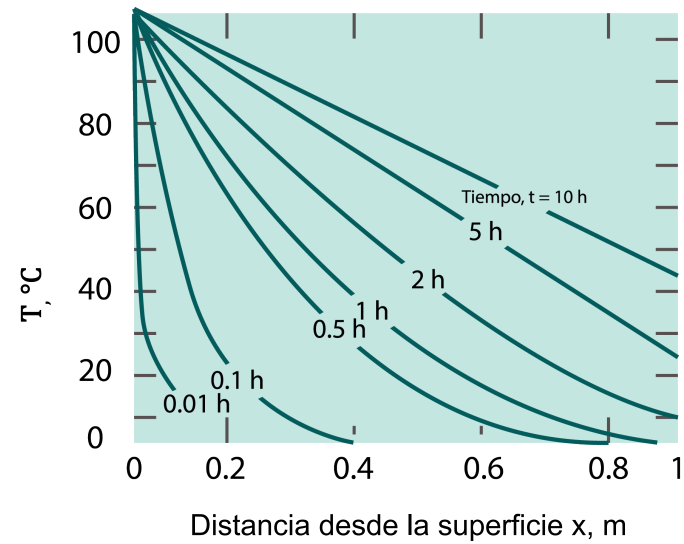


$$\mathrm{erf}\,(\eta)\ 2/\sqrt{\pi} \ = \int_0^{\eta} e^{-u^2}\, du$$

$$\mathrm{erf}\,c(\xi)\ 1 - 2/\sqrt{\pi} \ = \int_0^{\eta} e^{-u^2}\, du$$

SOLUCIÓN ANALÍTICA
Temperatura constante en la superficie.

T_s = constante



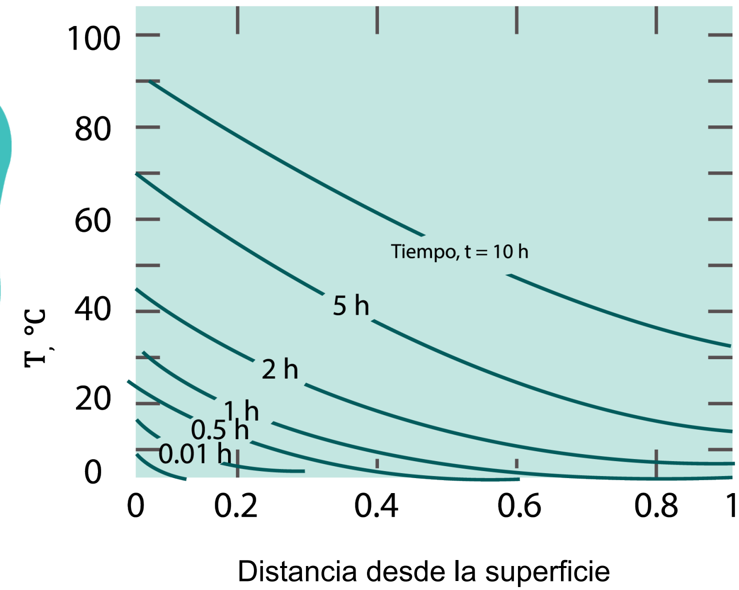
$T_i = 0\ °C$ $\quad T_s = 100\ °C$

$$T(x, t) - Ti/Ts - Ti = \mathrm{erfc}\ (x/2\sqrt{at}\ )$$

SOLUCIÓN ANALÍTICA

Flujo de calor constante en la superficie.

q_s =constante

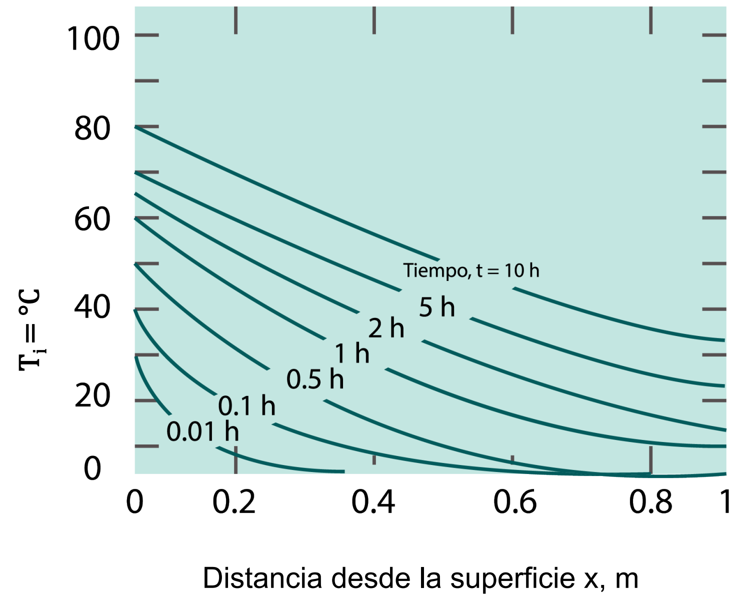


$T_i = 0°C$ q_s =constante 7000 W/m^2

$$T(x,t) - Ti = qs/k\ [\sqrt{4\alpha t/\pi}\ \exp(-x2/4\alpha t) - x\ erfc(x/2\sqrt{\alpha t}\ )]$$

SOLUCIÓN ANALÍTICA
Convección en la superficie

$$q_s(t) = h[T\infty - T(0, t)]$$

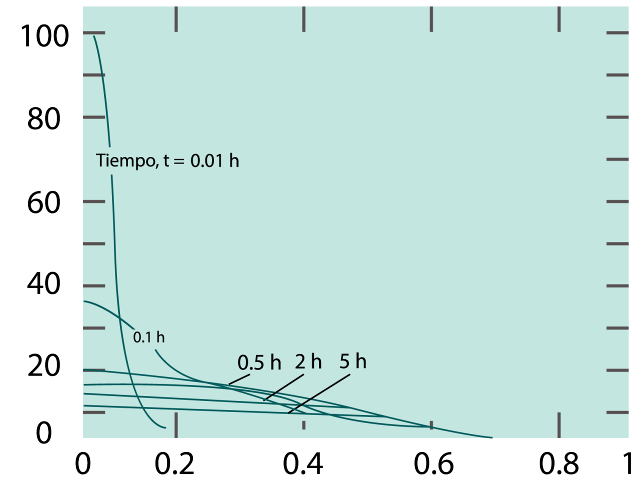


$T_i = 100$ °C
K 220 W/m2/k

$$T(x, t) - Ti/T\infty - Ti \ \mathrm{erfc}\ (x/2\sqrt{at}\ ) \text{-exp}\ (\ hx/k + h2at/k2\ )[erfc(x/a\sqrt{at}\ ) + h\sqrt{at}\ /k\ ]$$

SOLUCIÓN ANALÍTICA
Pulso de energía en la superficie.

e_s= constante



$T_i = 0\ °C$

$e_s = 1.7 \times 10^7\ J/m^2$

Distancia desde la superficie x, m

$$T(x,t) - T_i = es/k\sqrt{\pi t/\alpha}\ \exp\ (x2/4at)$$

REFERENCIA

Una buena referencia para los aspectos teóricos de la solución analítica de esta ecuación es el capítulo 18 del libro *“Fundamentals of Thermal Fluid Sciences*” de Yunus Cengel & Robert Turner.

Aunque la ecuación que describe la transferencia de calor es la misma para diferentes casos físicos, no lo son las condiciones a la frontera. Son las condiciones a la frontera las que caracterizan el problema y definen su solución. En el caso del sólido semiinfinito vimos las siguientes posibilidades:

CONDICIÓN	EXPRESIÓN
Temperatura constante en la superficie	T_s= Cte
Flujo de calor constante en la superficie	q_s= cosntante
Convección de la superficie	$q_s\ (t) = h[T\infty - T\ (0, t)]$
Pulso de energía constante en la superficie	e_s=constante

El Kreith resuelve en el capitulo 2 el ejemplo de la placa de espesor 2 h para otras condiciones de frontera.

También en el caso de la placa de espesor 2H es necesario cambiar las condiciones a la frontera cuando cambia la situación física. Por ejemplo cuando hay transferencia de calor a través de las paredes.

CONDICIONES DE FRONTERA PARA DIFERENTES CASOS

EJEMPLO DE SOLUCIÓN ANALÍTICA CON MATHEMATICA:

conducción de calor en una placa bidimensional

Housam Binous. "Solution of the 2D Heat Equation Using the Method of Lines"
http://demonstrations.wolfram.com/SolutionOfThe2DHeatEquationUsingTheMethodOfLines/
Wolfram Demonstrations Project

Published: March 27, 2012

Considere la ecuación:

$$\partial T/\partial t = \alpha\,(\partial 2T/\partial X2 + \partial 2T/\partial y2)$$

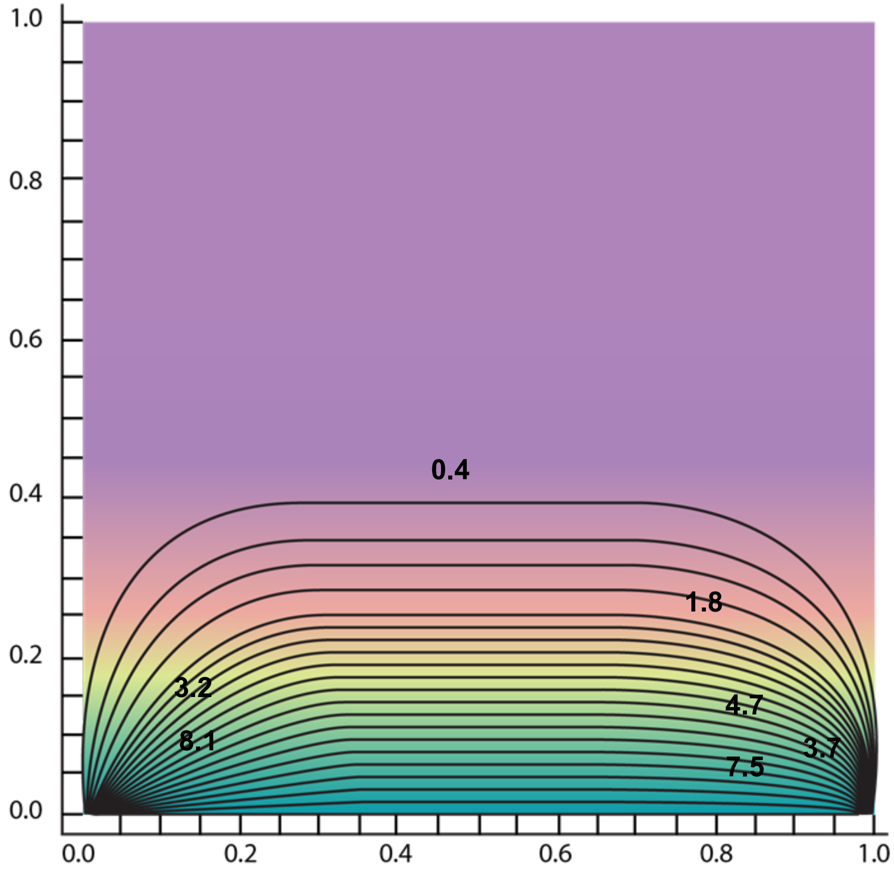
Con las siguientes condiciones de frontera e iniciales

$T(0, y, t) = 0$ $T(x, 1, t) = 0$ $T(x, y, 0) = 0$

$T(1, y, t) = 0$ $T(x, 0, t) = 10$

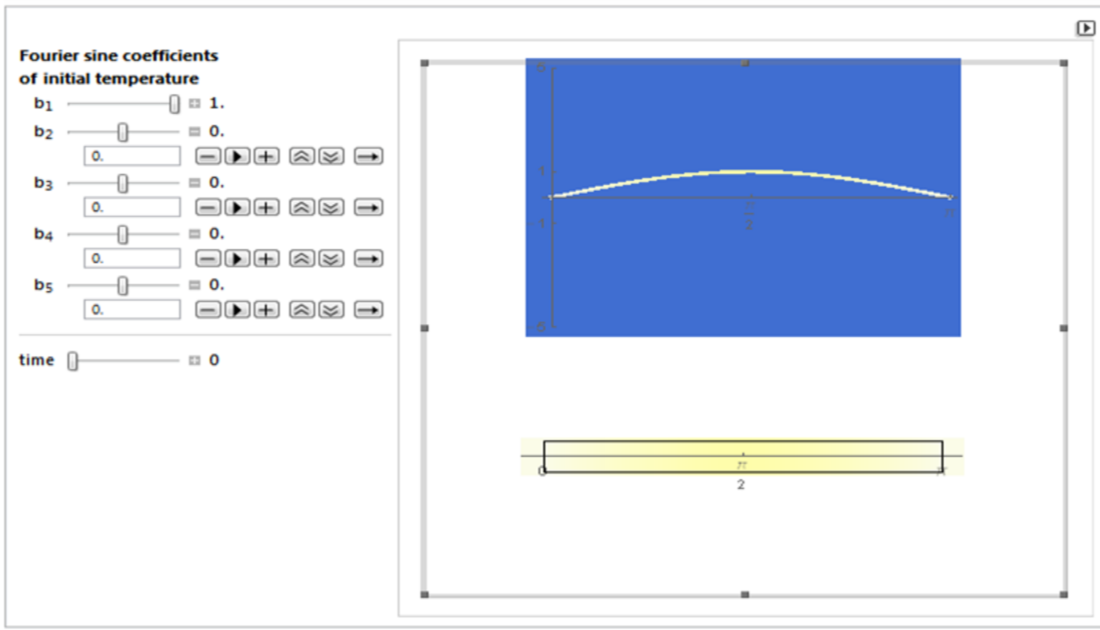
SOLUCIÓN. MÉTODO ANALÍTICO COMPUTACIONAL MATHEMATICA

Click en pantalla



OTRO EJEMPLOS EN:
WOLFRAM DEMOSTRATIONS

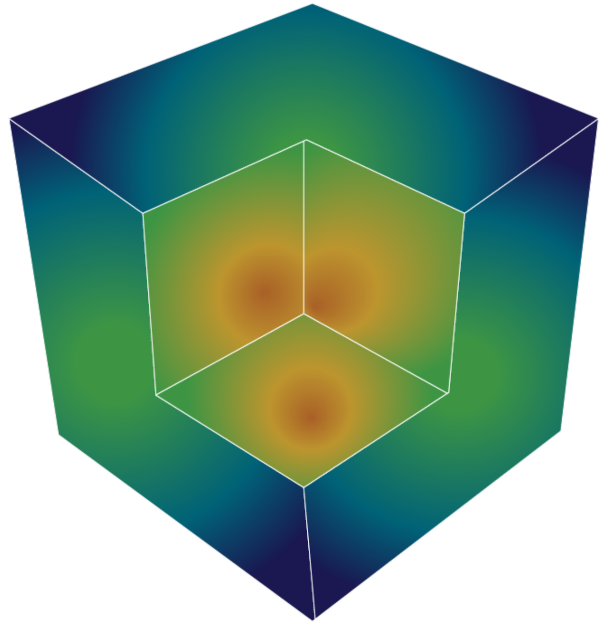
Mixed Boundary-Value Problem for the One-Dimensional Heat Equation



This Demonstration determines solutions to the mixed boundary-value problem for the one-dimensional heat equation. This pertains to the conduction of heat in a bar in which the ends are kept at fixed temperatures (0° in this case), with a specified initial temperature distribution, $u_0(x)$.

Contributed by: Santiago Marín Malavé

MÉTODOS NUMÉRICOS.
Abaqus



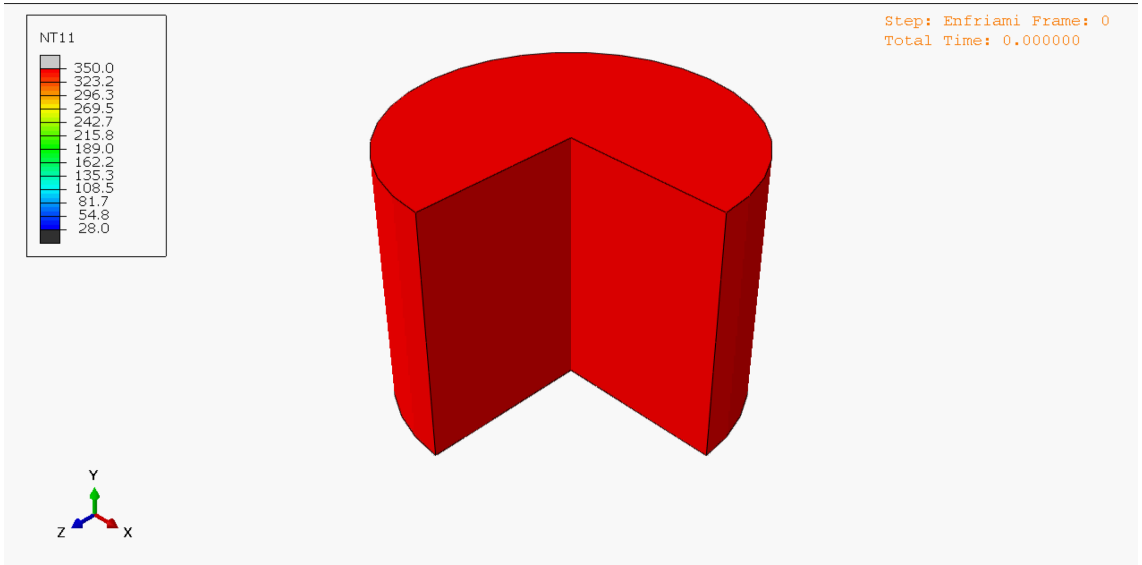
Medio finito

La ecuación de Fourier es:

$$\nabla^2 T(x,t)=1/\alpha \, \partial T(x,t)/\partial t$$

Una condición inicial
Seis condiciones a la frontera

EJEMPLO DE SOLUCIÓN NUMÉRICA. Abaqus



Tomado de:
https://onedrive.live.com/?authkey=!AMZMy9Evl2q0Kzo&id=7EDB1EC9396CB4A3!4111&cid=7EDB1EC9396CB4A3

SOLUCIONES MEDIANTE G

"Yesterday's engineers spent a major portion of their time substituting values into the formulas and obtaining numerical results. Now, however, formula manipulations and number crunching are being left to computers. Tomorrow's engineer will have to have a clear understanding and a firm grasp of the basic principles so that he or she can understand even the most complex problems,formulate them, and interpret the results."

Yunus A. Cengel.

En el pasado los ingenieros pasaban la mayor parte de su tiempo sustituyendo valores en las fórmulas y obteniendo resultados numéricos. Actualmente, sin embargo, la manipulación de las fórmulas y los números es tarea de las computadoras.

El ingeniero del futuro tendrá que tener una comprensión clara y sólida de los principios básicos que le permitan entender incluso los problemas más complejos, formularlos e interpretar sus resultados.

Durante cierto día de otoño, la temperatura del suelo tiene un valor constante de 15.6 ^{o}C (60 ^{o}F) hasta una profundidad de varios metros. Una onda fría reduce repentinamente la temperatura del aire de 15.6 hasta unos -17.8 ^{o}C (0 ^{o}F)). El coeficiente convectivo por encima del suelo es II .36 W/m^{2} ^{o}K. Las propiedades del suelo son: $\alpha = 4.65 \times 10^{-7}$ m^{2}/s y k= 0.865 W/m ^{o}C K . Desprecie los efectos del calor latente para encontrar:

a) ¿Cual será la temperatura de la superficie después de 5 h?

b) ¿Hasta qué profundidad del suelo penetrara la temperatura de congelación de 0 ^{o}C en 5 h?

SOLUCIÓN MEDIANTE GRÁFICAS

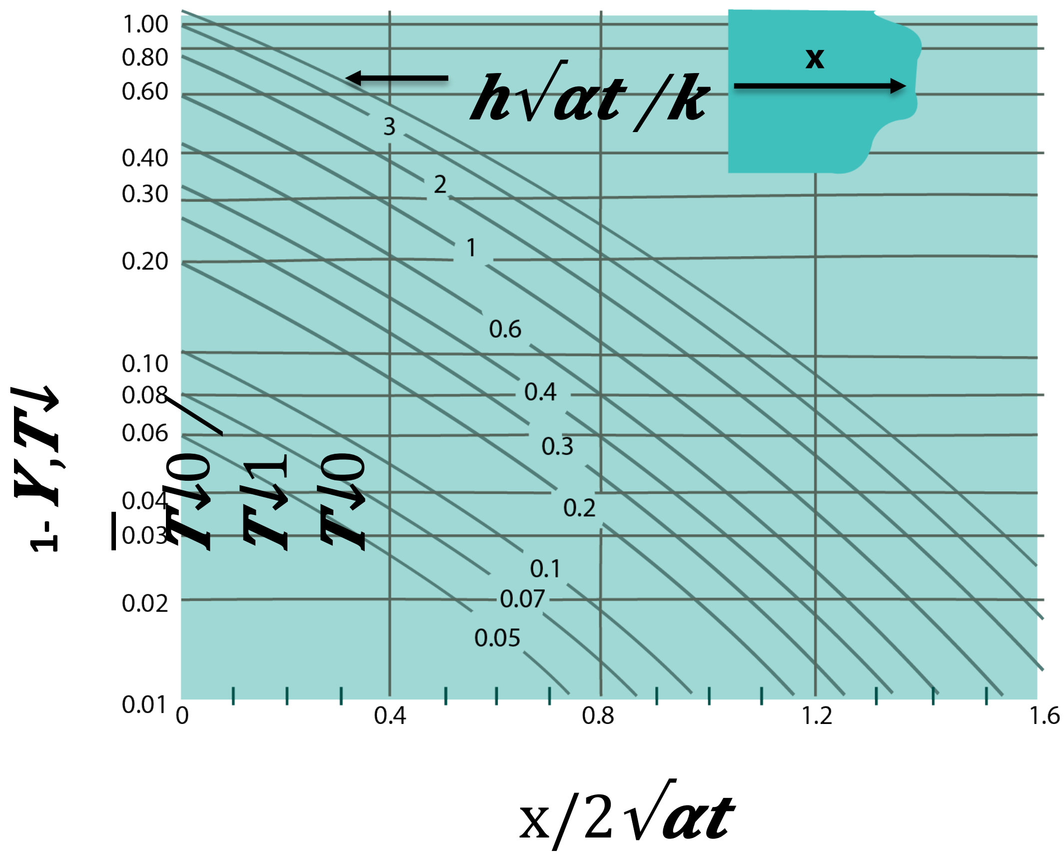
Ejemplo: temperatura del suelo

EL MÉTODO DE LAS GRAFICAS
“viajando al pasado”

Es el mismo problema del que dimos la solución analítica.

Viajando al pasado, el problema se puede resolver usando tablas.

EL MÉTODO DE LAS GRAFICAS



- Hay graficas para diferentes geometrías y condiciones.
- Debe tenerse cuidado con la grafica que selecciona.
- Los valores a la frontera e iniciales se reflejan en las distintas curvas.

Para usar la tabla es necesario calcular los parámetros

$$\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} \qquad \frac{h\sqrt{\alpha t}}{k}$$

Para la pregunta del a) x=0 y por lo tanto también $x/2\sqrt{\alpha t} = 0$

Sustituyendo los valores numéricos:

$h\sqrt{\alpha t}/k = 11.36(4.65x10\text{-}7)(51x3600))/0.5$ $h\sqrt{\alpha t}/k = 25(0.3168)/0.65$

Con lo que podemos ir a buscar en la tabla, el valor correspondiente de la temperatura adimensional y despejando: *T= 267.76 K o -5.44*

SOLUCIÓN

Para el inciso b), T= 273 2 K ó 0 °C, y se desconoce x.
Sustituyendo los valores conocidos,

$$T-T,/T1-T0 = 273.2-288.8/255.4-288.8 = 0.467$$

Para $(T-T_0) / (T_1 \quad T_0) = 0.467$ y h $\sqrt{at}/k = 1.2$

Se lee en la figura 5.3-3 un valor de 0.16 para x/2

$\sqrt{\alpha t}$ Por consiguiente:

$$x/2\sqrt{\alpha t} = x/a\sqrt{(4.65\ x\ 10-7)\ (5\ x\ 3600)} = 0.16\ x/2\sqrt{\alpha t} = x/2\sqrt{}$$

Despejando x, esto es, la distancia de penetración de la temperatura de congelación en 5 h

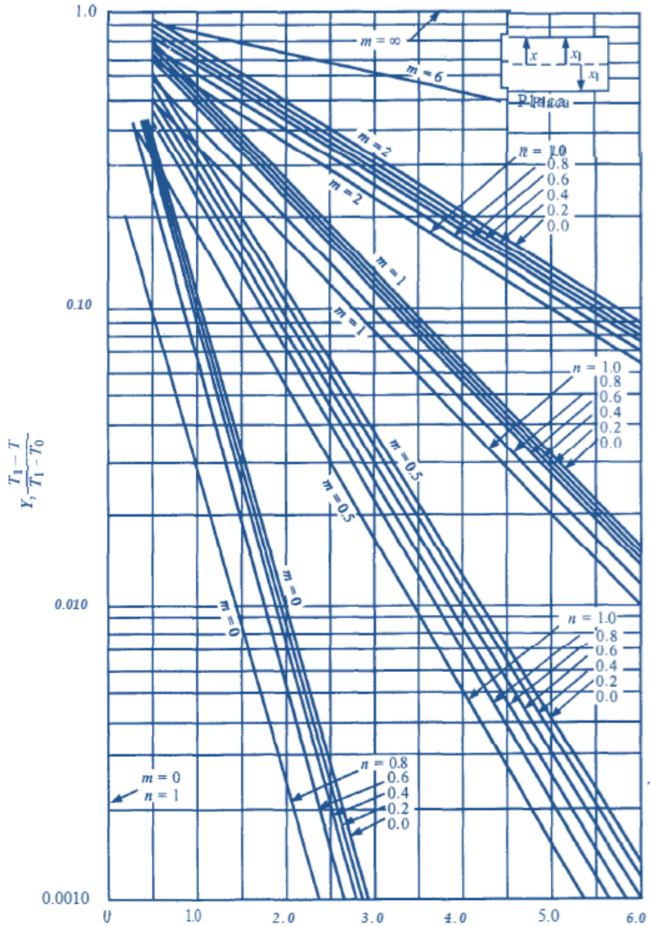
X = 0.0293 m (0.096 pie)

EL MÉTODO DE LAS GRAFICAS

Placa infinita de espesor $2X_1$ con pérdida por convección

El detalle del cálculo analítico puede verse en el Kreith:

Gráfica de Gurney et Al. (Tomada de Geankoplis)



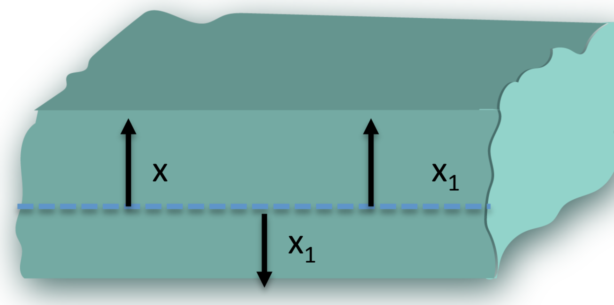
$$X = \frac{\alpha t}{x_1^2}$$

El calor sólo es conducido en la dirección x desde las dos superficies planas.

La temperatura inicial de la placa es T_o

El sólido se expone a una temperatura ambiental T_1

Existe en las fronteras transferencia de calor por convección



$$Y = \frac{T_1 - T}{T_1 - T_0} \qquad m = \frac{k}{hx_1} \qquad 1 - Y = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0} \qquad n = \frac{x}{x_1}$$

TEMPERATURA EN EL CENTRO DE UNA PLACA PLANA GRANDE

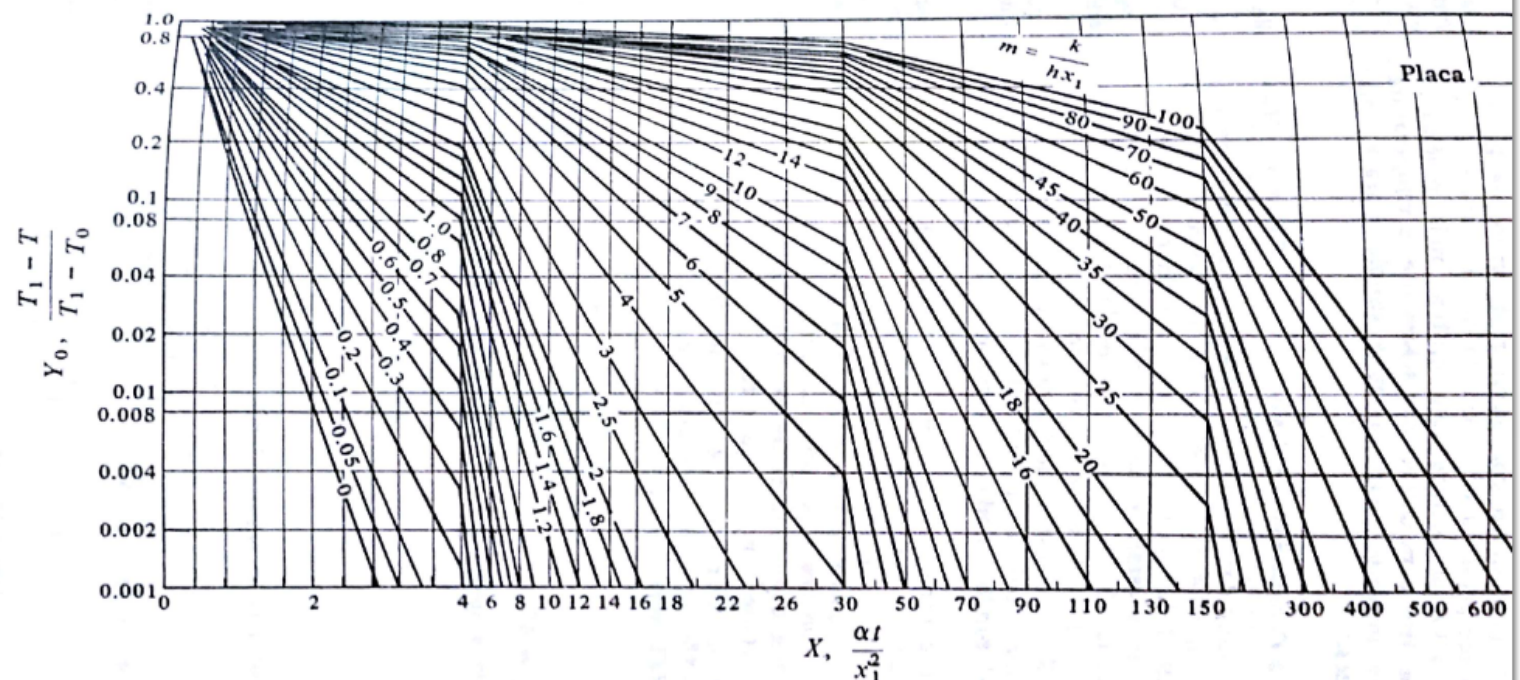
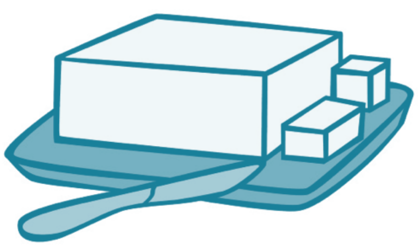


FIGURA 4.3-6. *Gráfica para determinar la temperatura del centro de una placa plana grande para conducción de calor de estalo inestable.* [Tomado de H. P. Heisler, *Trans. A.S.M.E.*, **69**, 227 (1947). Reproducido con permiso.]

EJEMPLO

Conducción de calor en una barra de mantequilla
Una barra rectangular de mantequilla con 46.2 mm de espesor y temperatura de 277.6 K
(4.4 “C) se extrae de la nevera y se coloca en un medio ambiente a 297.1 K (23.9 “C). (Puede considerarse que los lados y el fondo de la mantequilla están aislados por las paredes del recipiente. Por tanto, el área expuesta al medio ambiente es la superficie plana superior de la mantequilla).
El coeficiente convectivo es constante y tiene un valor de 8.52 W/m* . K. Calcule la temperatura de la mantequilla en la superficie a 25.4 mm por debajo de la superficie y a 46.2 mm por debajo de la superficie en el fondo aislado, después de una exposición de 5 h.



SOLUCIÓN

Consideremos la mantequilla como una placa plana grande con conducción vertical en la dirección X.
Como el calor sólo penetra por la parte superior y la superficie inferior esta aislada, los 46.2mm de mantequilla equivalen a la mitad de la placa de un espesor X1 046.2 mm

Las propiedades de la matequilla son:
$K = 0.197 W/m\ K$, $Cp = 2.30\ Kj/kg.\ K$ y $\rho = 998\ kg/m3$.
La difusividad térmica es

$$\alpha = k/\rho cp = 0.197/998(2300) = 8.58 \times 10^{-8}\ m^2/s$$

Los parámetros para leer la gráfica son entonces:

$$m = k/hx1 = 0.197/8.52(0.0462) = 0.50$$

$$n = x/x1 = 0.0462/0.0462 = 1.0$$

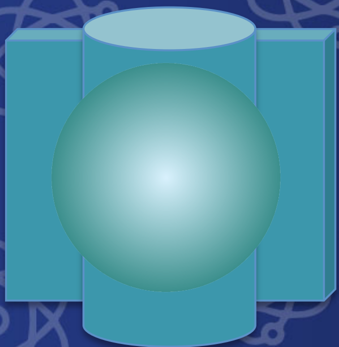
$$x = \alpha/x1 = (8.58 \times 10^{-8})(5 \times 3600)/(0.0462)^2 = 0.72$$

Donde se obtiene:

$$Y = 0.25 = T1 - T/T1 - T0 = 297.1 - T/297.1 - 277.$$

Finalmente, despejando T = 292.2 K (19.0 C)

COMENTARIOS



- Hay muchos otros casos, de interés del ingeniero que pueden resolverse con la misma ecuación
- Para otras geometrías:
  - Pared vertical
  - Cilindro
  - Esfera
- Y otras condiciones a la frontera
- Incluso pueden combinarse soluciones gráficas para obtener soluciones de lo que se llama sistemas multidimensionales, pero eso será en otra lección.

EXCEL

Aun falta dar ejemplos del uso de Excel en la solución de problemas de transferencia de energía en estado no estacionario.

En este curso Excel lo utilizaremos en la próxima lección al resolver problemas de transferencia de energía en estado no estacionario en coordenadas no cartesianas

REFERENCIAS

Geankoplis
Kreith.
Yunus Cengel & Robert Turner. "Fundamentals of Thermal Fluid Sciences". McGraw Hill education 2012.
Ozizik.