DGTIC

Facultad de Química

Dirección General de Cómputo y de Tecnologías de Información y Comunicación

CURSO:
TRANSFERENCIA DE ENERGÍA

Doctor Rafael Fernández Flores

Trabajo realizado con el apoyo del
Programa UNAM-DGAPA-PAPIME
PE110517

CONDUCCIÓN DE CALOR EN ESTADO ESTACIONARIO: FUENTES INTERNAS

PROBLEMA

¿Cómo se escribe (y resuelve) la ecuación de transporte de energía, cuando existen fuentes internas de generación de calor?

OBJETIVOS

1. Conocer que tipo de situaciones corresponden a generación interna de calor
2. Conocer la ecuación de transporte de energía, cuando existen fuentes internas de generación de calor
3. Plantear problemas de conducción de calor cuando existen fuentes al interior del material
4. Resolver problemas de conducción de calor en estado estacionario cuando existen fuentes internas

BALANCE DE ENERGÍA CON FUENTES DE CALOR

EJEMPLOS

- Efecto joule
- Fricción viscosa de un fluido entre dos cilindros
- Reacción química
- Reacción nuclear

CUESTIONARIO

MENÚ

EJEMPLOS DE SITUACIONES QUE CORRESPONDEN A GENERACIÓN INTERNA DE CALOR

- Efecto Joule
- Fricción viscosa de un fluido entre dos cilindros
- Reacción química
- Reacción nuclear

- Balance
- Ecuación diferencial para el flux con condiciones a la frontera
- Integración para el flux
- Ecuación de Fourier
- Integración para la temperatura
- Perfil de temperaturas
- Cálculo del flujo de calor en la superficie

PASOS PARA CONOCER EL PERFIL DE TEMPERATURA Y EL FLUJO DE CALOR

BALANCE SIN Y CON FUENTES DE CALOR

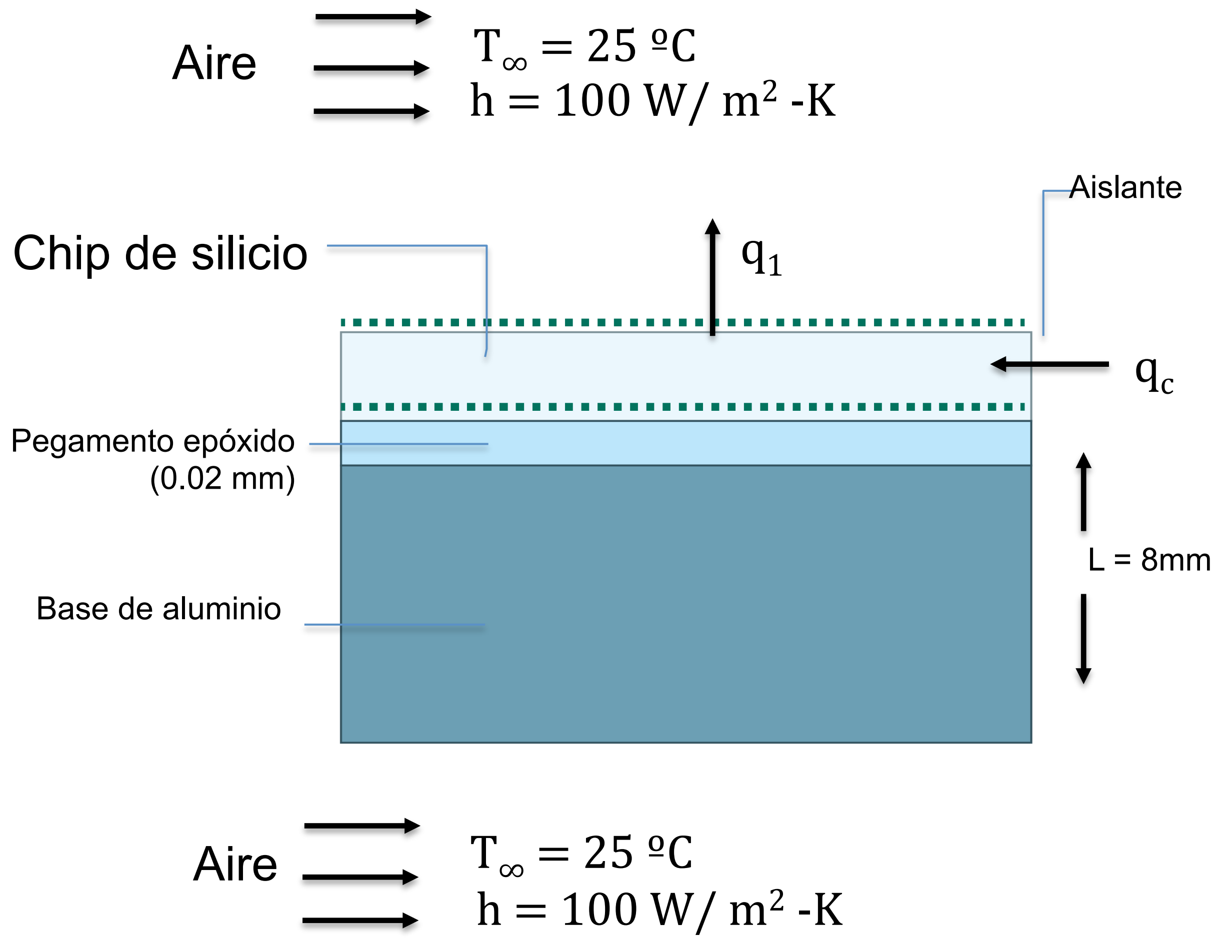
BALANCE SIN FUENTE DE CALOR

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Velocidad de}\\ \textbf{entrada}\\ \text{de energía}\\ \text{calorífica}\end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{c}\text{Velocidad de}\\ \textbf{salida}\\ \text{de energía}\\ \text{calorífica}\end{array}\right\} = 0$$

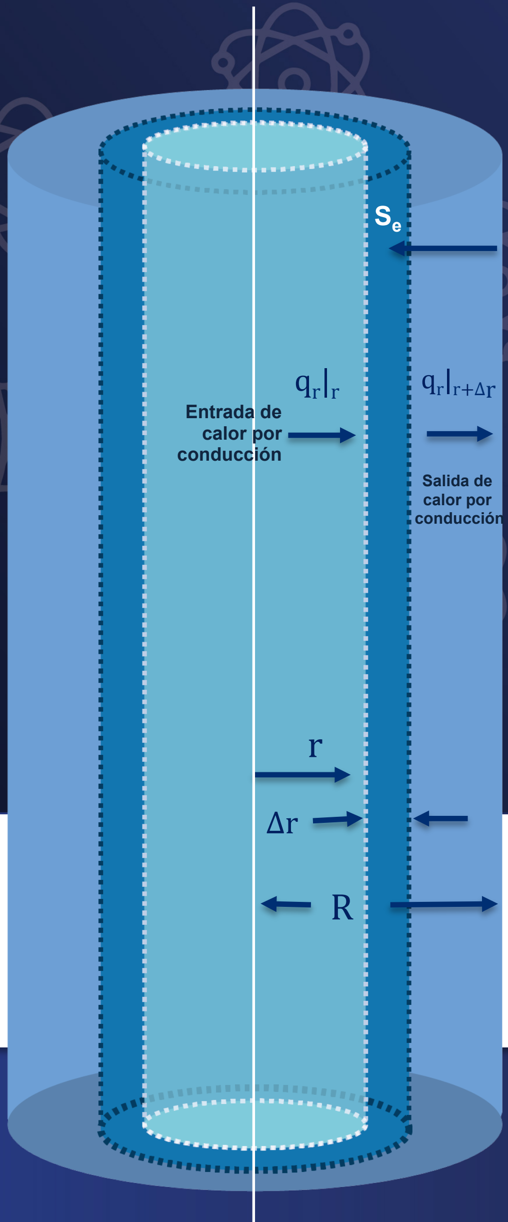
BALANCE CON FUENTE DE CALOR

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Velocidad de}\\ \textbf{entrada}\\ \text{de energía}\\ \text{calorífica}\end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{c}\text{Velocidad de}\\ \textbf{salida}\\ \text{de energía}\\ \text{calorífica}\end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c}\text{Velocidad de}\\ \textbf{producción}\\ \text{de energía}\\ \text{calorífica}\end{array}\right\} = 0$$

LA CLASE ANTERIOR



$$q_c = Tc - T\infty \ /(1/h) + Tc - T\infty/R\,t{,}c + (\ldots$$



Producción uniforme de calor por disipación eléctrica S_e

EFECTO JOULE

BALANCE

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Velocidad de}\\ \textbf{entrada}\\ \text{de energía}\\ \text{calorífica}\end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{c}\text{Velocidad de}\\ \textbf{salida}\\ \text{de energía}\\ \text{calorífica}\end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c}\text{Velocidad de}\\ \textbf{producción}\\ \text{de energía}\\ \text{calorífica}\end{array}\right\} = 0$$

$$(2\pi rL)\,(q_r|_r) - (2\pi\,(r+\Delta r)(q_r|_{r+\Delta r}) + (2\pi r\Delta rL)\,S_e = 0$$

S_e es la velocidad de generación de energía por unidad de volumen

$$\lim_{\Delta r \to 0} \frac{r q_r|_{r+\Delta r} - (r q_r)|_r}{\Delta r} = S_e r$$

$$\frac{d}{dr}(r q_r) = S_e r$$

$$para\ r = 0 \qquad q_r \ no\ es\ infinito$$

$$para\ r = R \qquad T = T_0$$

Comentario: Las condiciones a la frontera pueden darse en términos de la variable T_0 de su derivada, el flujo q

ECUACIÓN Y CONDICIONES A LA FRONTERA

INTEGRACIÓN

$$q_r = Ser/2 + c1/r$$

$$q_r = Ser/2$$

$$S_e = I2/Ke$$

Cálculo de S_e :

S_e= Pot elec / Vol

Pot = I^2R (I = I / A)   R = (1/Ke) (L/A)

Vol= A L

COMENTARIOS

La ley de Ohm escrita en términos de la conductividad eléctrica y de la densidad de corriente es:

$$I = k_e \, E/L$$

Como $$S_e = I2/ke$$

La cantidad de energía generada por unidad de volumen aumenta con la diferencia de potencial y con la resistividad.

PERFIL DE TEMPERATURAS

$$- k\,dT/dr = Ser/2$$

$$T = - Ser2\ /4k + C2$$

C_2 es igual a $T_0 + (S_eR^2/4k)$

$$T - T_0 = SeR2/4K\,[1-(r/R)_2]$$

COMENTARIOS

Se trata de un perfil parabólico
Tiene su valor máximo cuando r=0
Puede calcularse el incremento máximo de temperatura:

$$T_{\max} - T_0 = SeR2/4k$$

Puede calcularse el incremento medio de la temperatura:

$$<T> - T_0 = SeR2/8k$$

RELACIÓN DE LA TEMPERATURA MÁXIMA Y LA DIFERENCIA DE POTENCIAL

Sustituyendo $\mathrm{I} = \mathrm{k_e}\, E/L$ en $\mathrm{S_E} = I2/ke$

Y después S_e en la expresión para la diferencia de temperaturas, se obtiene la relación entre la diferencia de potencial E y la temperatura máxima.

$$\mathrm{T_{max}} - \mathrm{T_0} = (E2R2/4L2)\,(ke/k)$$

Vale la pena hacer notar que la temperatura máxima también dependerá de la relación de conductividades eléctrica y térmica, de la geometría del conductor, es decir de su radio y su longitud y de la temperatura $\mathrm{T_0}$ en la superficie del conductor.

Establece que el cociente de la conductividad calorífica y eléctrica es proporcional a la Temperatura absoluta:

$$K/K_e = L\,T$$

L a constante de proporcionalidad L es la constante de Lorenz y tiene un valor alrededor de:

$2.44 \times 10^{-8}\ \mathrm{W}\,\Omega\,\mathrm{K}^{-2}$

LEY DE WIEDEMANN - FRANZ

$$Q\,|_{r=R} = 2\pi RL \cdot qr|r=R$$

$$= 2\pi RL \cdot SeR/2$$

$$S_e = I2/ke$$

$$= L\ I2\ \pi R2\ /ke$$

CÁLCULO DEL FLUJO DE CALOR EN LA SUPERFICIE

EJEMPLO 1.

Un alambre de cobre tiene un radio 2 mm y una longitud de 5 m
¿Qué diferencia de potencial es necesaria para que la temperatura en el centro del alambre se eleve 10 ºC si su temperatura en la superficie es de 20 ºC.

Usando la expresión $T_{max} - T_0 = (E2R2/4L2\ )\ (ke/k\ )$ y la ley de ***Wiedemann Franz***:

Obtenemos: $E = 2(L/R\ )\sqrt{k/ke\ T0}\ \ \sqrt{T0\ (Tmax - T0)}$

Sustituyendo los valores numéricos: $E = 2(5000\ \text{mm}/2\ \text{mm}\ )\sqrt{2.23\ \text{x}10^{-8}\ \text{volt}/\text{K}}\ \ \sqrt{(293)(10)K}$

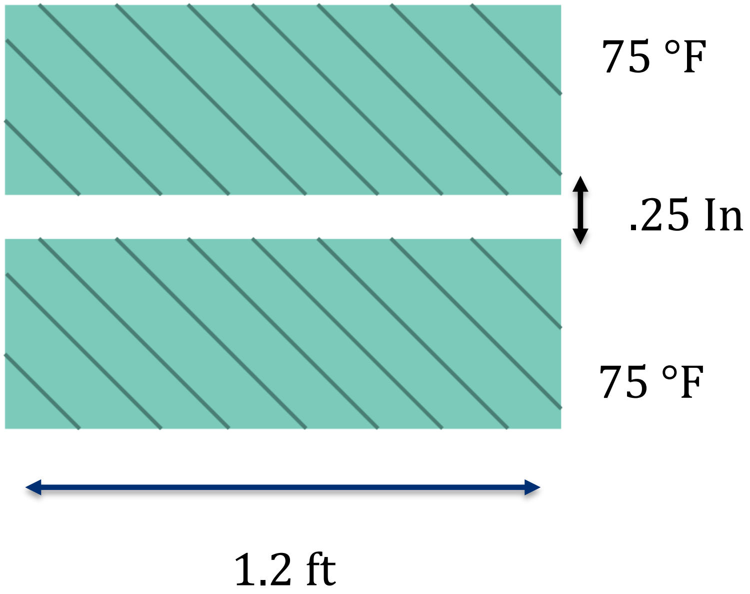
$= (5000)(1.49\ \text{X}10^{-4})(54.1) = 40\ \text{volts}$

EJEMPLO 2

Dos placas de cobre a temperatura de 75 °F están separadas por una varilla de cobre (K= 220 BTU/Hr-Ft-F) de 0.25 In de diámetro y 1.2 ft de longitud. La varilla se suelda a las placas y el espacio entre ellas se llena con un aislante que también aísla las caras laterales de la varilla.

Encuentre la corriente máxima que la varilla puede llevar si existe la restricción de no exceder 300 ºF en ningún punto.

(La resistencia eléctrica del cobre es 5.3 X 10^{-8} Ohm/ft.



Ecuación de balance:

$$d2T/dx2 + q'/k = 0$$

Solución:

$$T(x) = T_b + q' L2/8k \, [1 - (2x/L)2]$$

¿Condiciones iniciales?

ECUACIÓN, CONDICIONES INICIALES Y SOLUCIÓN

RESOLVIENDO

En $X = 0$ $T(X)$ no debe rebasar $300\ F$

$$T\ (x) = T_b + q'\ L2/8k\ [1 - (2x/L)2]$$

Sustituyendo: $300 = 75 + q'\ (1.2)2/8 \times 220$

$(1\ -\ 0)$

$$q' = 225 \times 8 \times 220/(1.2)2$$

$$= 275{,}000\ \ \mathrm{Btu/hr\text{-}ft^3}$$

RELACIÓN DE q' CON LA INTENSIDAD

Recordando que: $q' = q/\text{volumen}$

Y que $q = RI^2$ $q' = RI2/\text{volumen}$

Calculamos R $R = \rho l/A$ $R = 5.3 \; x \; 10^{-8} \; x \; 1.2/\pi/4 \; (0.25/12\,)2$ $= 1.87 \; x \; 10^{-4}$ ohm.

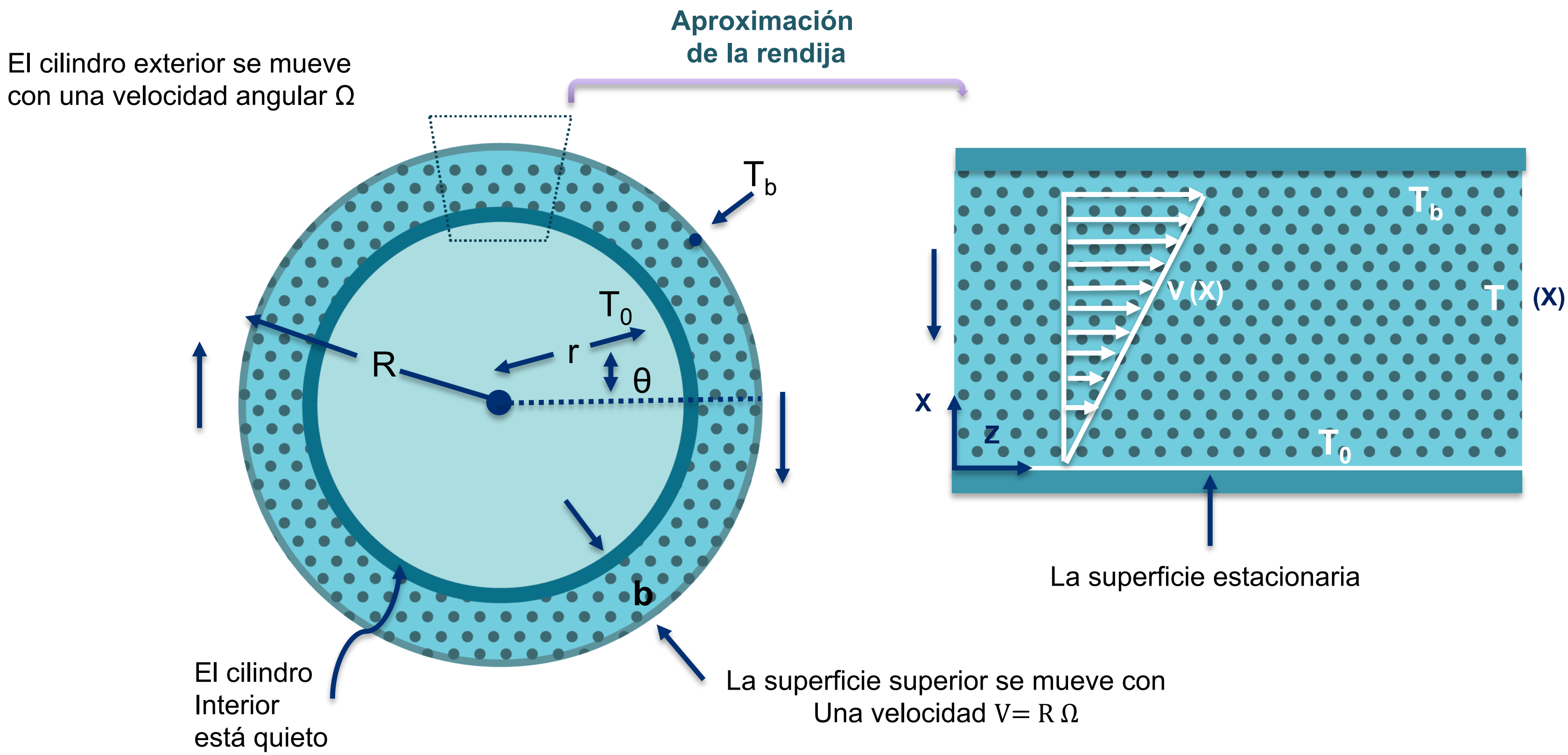
Sustituimos: $q' = RI2/\text{volumen}$

$275{,}000 = 1.87 \text{ x } 10-4 \text{ x } I2/\pi/4 \; (0.25/12\,)2 \text{ x } 1.2 \; x \; 3.413$

Despejando:

$I = [275{,}000 \; X \, \pi/4 \; (0.25/12\,)2 \; x \, 1.2/3.413 \; x \; 1/1.87 \; x \, 10-4\,]^{1/2}$ $= 420$ amps

VISCOSIDAD



$$S_v = -\tau_{xz}\left(\frac{dv_z}{dx}\right) = \mu\left(\frac{dv_z}{dx}\right)^2$$

ANÁLOGAMENTE

Balance	$WLq_x\|_x - WLq_x\|_{x+\Delta z} + WLX\mu\left(\frac{V}{b}\right)^2 = 0$
Ecuación diferencial para q + CI	$\frac{dq_\infty}{dx} = \mu\left(\frac{V}{b}\right)^2$
Integración para q	$q_x = \mu\left(\frac{V}{b}\right)^2 x + C_1$
Ecuación de Fourier	$-k\frac{dT}{dx} = \mu\left(\frac{V}{b}\right)^2 x + C_1$
Integración para T	$T = -\left(\frac{\mu}{k}\right)\left(\frac{V}{b}\right)^2 \frac{x^2}{2} - \frac{C_1}{k}x + C_2$
Perfil de temperaturas	$\frac{T - T_0}{T_b - T_0} = \left(\frac{x}{b}\right) + \frac{1}{2}Br\left(\frac{x}{b}\right)\left[1 - \left(\frac{x}{b}\right)\right]$

1 Resuelto con la aproximación de fluido entre dos placas paralelas de pequeño espesor (rendija)

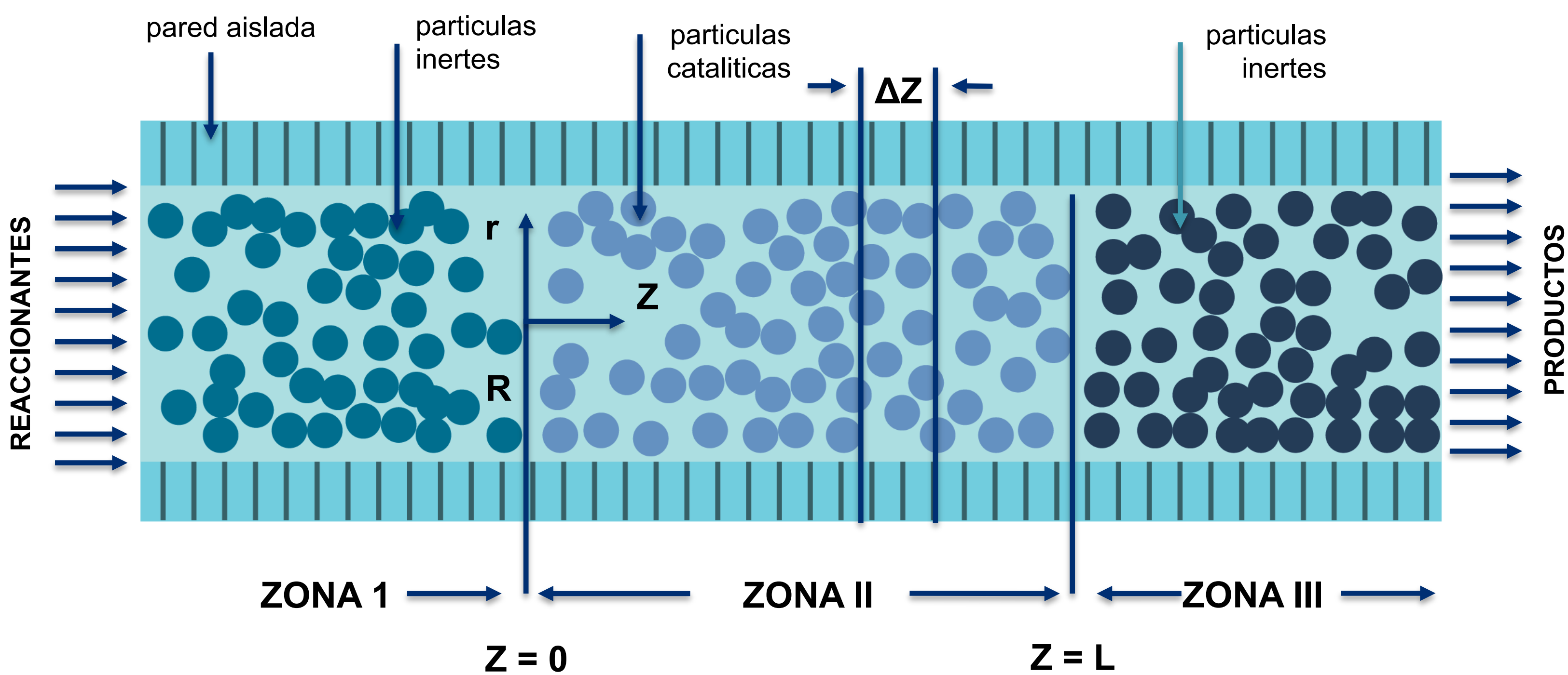
$$\mathrm{Br} = [\mu V2/k\,(Tb - T0)]$$

REACCIÓN QUÍMICA

REACCIÓN QUÍMICA

$$S_e = S_{c1}\left(T - T/T1 - T0\right)$$

S_{C1} y T_0 **Son constantes empíricas**



TÉRMINOS PARA EL BALANCE

El flujo de energía que **entra por conducción** en el punto Z	$\pi R^2 q_z\|_z$
Flujo de energía que **sale por conducción** en el punto Z +Δz	$\pi R^2 q_z\|_{z+\Delta z}$
Flujo de energía que **entra por convección** en el punto Z	$\pi R^2 \rho_1 v_1 C_p (T-T_0)\|_z$
Flujo de energía que **sale por convección** en el punto Z +Δz	$\pi R^2 \rho_1 v_1 C_p (T-T_0)\|_{z+\Delta z}$
Energía por unidad de tiempo producida dentro del volumen de control	$(\pi R^2 \Delta z) S_c$

ANÁLOGAMENTE

EL PROBELMA SE RESUELVE POR ZONAS. SOLO EN LA ZONA 2 EXISTE GENERACION DE CALOR	
BALANCE	$\frac{q_Z \|_{Z+\Delta Z} - q_Z \|_{Z}}{\Delta z} + \rho_1 v_1 C_v \frac{T\|_{Z+\Delta Z} - T\|_{Z}}{\Delta z} = S_e$
ECUACION DIFERENCIAL PARA q +CI	$\frac{dq_z}{dz} + \rho_1 v_1 C_p \frac{dT}{dz} = S_e$
INTEGRACION PARA q	
ECUACION DE FOURIER (ZONA 2). EN LAS ZONAS 1 y 3 $S_e = 0$	$-k_{z,ef} \frac{d^2 T}{dz^2} + \rho_1 v_1 C_p \frac{dT}{dz} = S_e$

$$Z = z/L$$

$$\Theta = T - T0/T1 - T0$$

$$B = p1v1CpL/kzef$$

$$N = SC1L/p1\ v1\ Cp\ (T1 - T0)$$

$$m_3 = 1/2\ B\ (1 - \sqrt{1 - (4N/B)}\ )$$

$$m_4 = 1/2\ B\ (1 + \sqrt{1 - (4N/B)}\ )$$

ADIMENSIONALIZACIÓN

PERFIL DE TEMPERATURAS

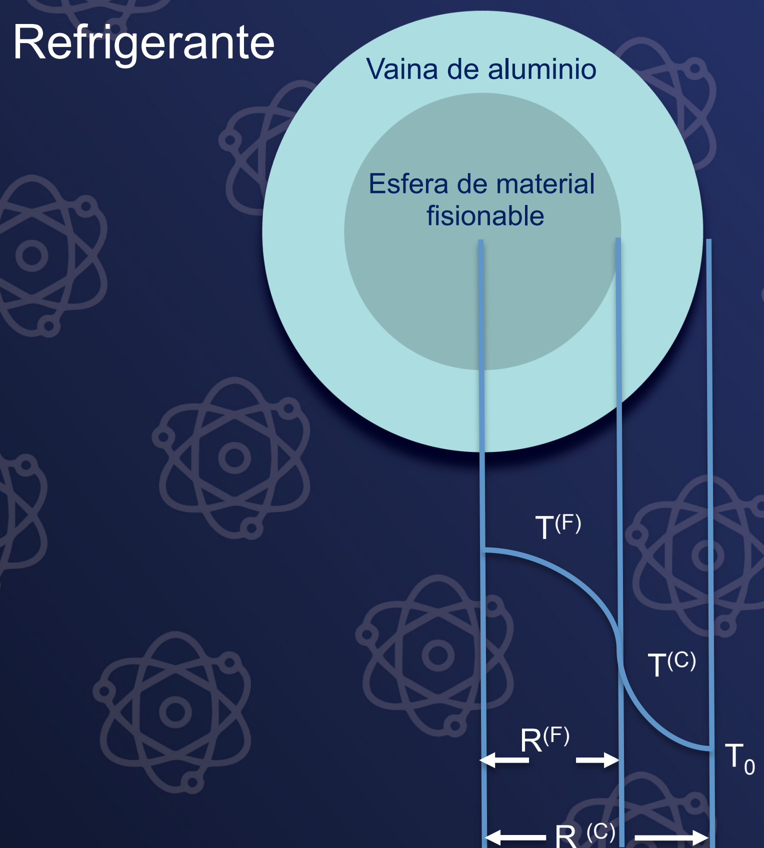
INTEGRACIÓN PARA T	$\Theta = C_3 e^{maz} + C_4 e^{m4z}$ (para $m_3 \neq m_4$)
PERFIL DE TEMPERATURAS	$\Theta = (m4em4em3z - m3emaem4z/m\blacksquare 2@4$ $em4 - m\blacksquare 2@3\ em3\ )\ (m_3 + m_4)$

$$m_3 = 1/2\ \ B\ (1 - \sqrt{1} - (4N/B)\ )$$

$$m_4 = 1/2\ \ B\ (1 + \sqrt{1} - (4N/B)\ )$$

Comentario:
El perfil de temperaturas es una suma de exponenciales.
Las constantes de altura y crecimiento dependen de N y B
Que son funciones de los materiales, de las condiciones de flujo y de la geometría.

REACCIÓN NUCLEAR



$$S_n = S_{n0}\ [1 - b\ (r/ R(F)\ )2]$$

REACCIONES NUCLEARES

ANÁLOGAMENTE
(TAMBIÉN SE RESUELVE POR ZONAS)

ECUACION DIFERENCIAL PARA q+CI	$\frac{d}{dr}\left(r^2 q_r^{(F)}\right)=S_{n0}\, r^2 \left[1+b\left(\frac{r}{R^{(F)}}\right)^2\right]$ $\frac{d}{dr}\left(r^2 q_r^{(C)}\right)=0$
INTEGRACIÓN PARA q	$q_r^{(F)} = S_{n0}\left(\frac{r}{3}+\frac{b}{R^{(F)2}}\frac{r^3}{5}\right)$ $q_r^{(C)} = S_{n0}\, R^{(F)3}\left(\frac{1}{3}+\frac{b}{5}\right)\frac{1}{r^2}$
ECUACION DE FOURIER	$-k^{(F)}\frac{dT^{(F)}}{dr} = S_{n0}\left(\frac{r}{3}-\frac{b}{R^{(F)2}}\frac{r^3}{5}\right)$ $-k^{(C)}\frac{dT^{(C)}}{dr} = S_{n0}\, R^{(F)3}\left(\frac{1}{3}-\frac{b}{5}\right)\frac{1}{r^2}$

ANÁLOGAMENTE
(TAMBIÉN SE RESUELVE POR ZONAS)

INTEGRACIÓN PARA T	$T^{(F)} = -\frac{S_{n0}}{k^{(F)}}\left(\frac{r^2}{6} - \frac{b}{R^{(F)2}}\frac{r^4}{20}\right) + C_2^{(F)}$ $T^{(C)} = +\frac{S_{n0}}{k^{(C)}} R^{(F)3}\left(\frac{1}{3} - \frac{b}{5}\right)\frac{1}{r} + C_2^{(C)}$
PERFIL DE TEMPERATURAS	$T^{(F)} - T_0 = -\frac{S_{n0} R^{(F)2}}{6k^{(F)}}\left\{\left[1-\left(\frac{r}{R^{(F)}}\right)^2\right] - \frac{3}{10} b\left[1-\left(\frac{r}{R^{(F)}}\right)^4\right]\right\}$ $+\frac{S_{n0} R^{(F)2}}{3k^{(C)}}\left(1-\frac{3}{5} b\right)\left(1-\frac{R^{(F)}}{R^{(C)}}\right)$ $T^{(C)} - T_0 = -\frac{S_{n0} R^{(F)2}}{3k^{(C)}}\left(1-\frac{3}{5} b\right)\left(\frac{R^{(F)}}{r} - \frac{R^{(F)}}{R^{(C)}}\right)$