UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU

DGTIC

Dirección General de Cómputo y de Tecnologías de Información y Comunicación

Facultad de Química

CURSO:
TRANSFERENCIA DE ENERGÍA

Doctor Rafael Fernández Flores

Trabajo realizado con el apoyo del
Programa UNAM-DGAPA-PAPIME
PE110517

CONDUCCIÓN A TRAVÉS DE PAREDES COMPUESTAS

PROBLEMA

Se desea estudiar la transferencia de calor a través de una sucesión de capas de diferentes materiales, cuyas fronteras están en contacto con un fluido.

Se quiere hacerlo en dos geometrías:

a) Cartesiana (paredes rectangulares)
b) Cilíndrica

OBJETIVOS

1. Conocer las ecuaciones para el cálculo de transferencia de calor a través de paredes compuestas en coordenadas rectangulares y cilíndricas.

2. Utilizar dichas ecuaciones para resolver problemas en coordenadas rectangulares y cilíndricas.

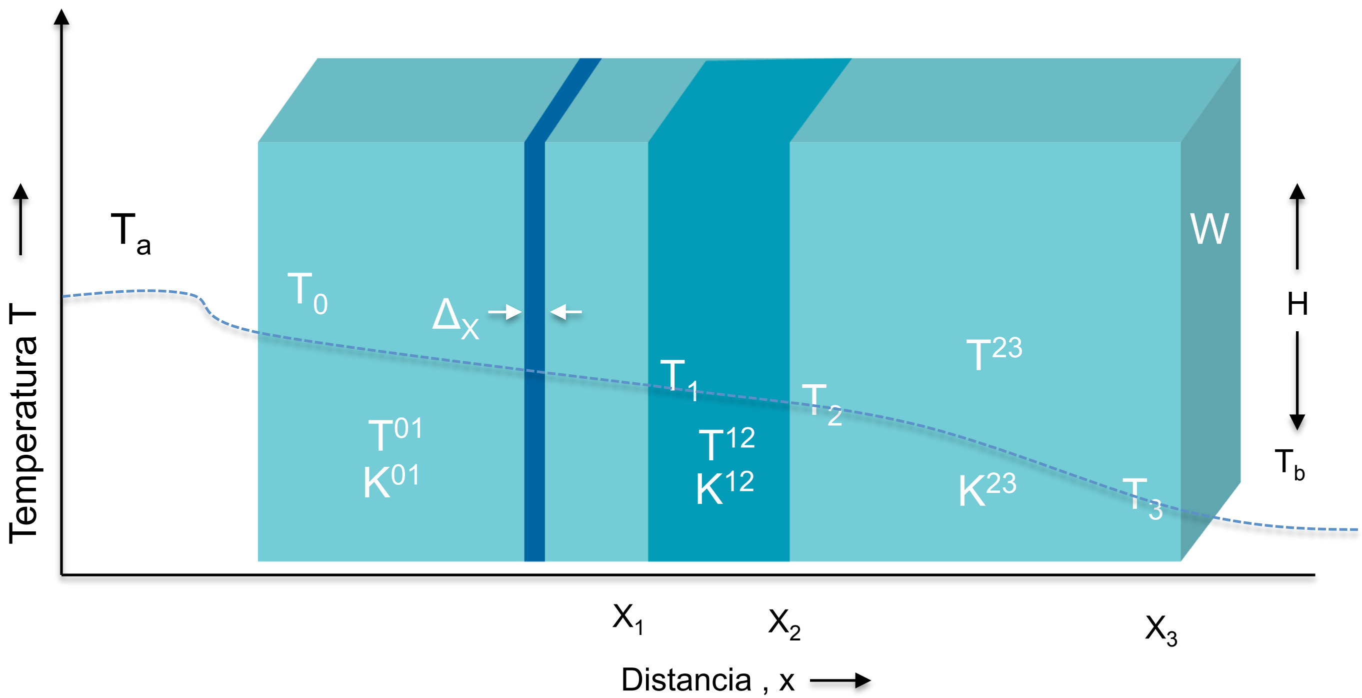
3. Comprender el efecto de la geometría en el proceso de conducción del calor en paredes paralelas.

4. Poder sugerir mecanismos de ahorro de energía con base en cálculos de transferencia de energía a través de paredes compuestas.

MENÚ

- PAREDES COMPUESTAS RECTANGULARES
- PAREDES COMPUESTAS CILÍNDRICAS
- DIFERENCIAS Y SEMEJANZAS ENTRE EL CASO DE GEOMETRÍA CARTESIANA Y EL DE GEOMETRÍA CILÍNDRICA.
- RESISTENCIA DE CONTACTO
- EJEMPLOS
- PRINCIPALES DIFICULTADES
- CUESTIONARIO

PAREDES COMPUESTAS RECTANGULARES



Conducción de calor a través de una pared compuesta situada entre dos corrientes de fluido a temperaturas T_a y T_b

- Balance.
- Ecuación diferencial para q y condiciones a la frontera.
- Integración para q
- Ecuación de Fourier
- Integración para T
- Perfil de temperaturas
- Cálculo del flujo de calor en la superficie

PASOS PARA CONOCER EL PERFIL DE TEMPERATURA Y EL FLUJO DE CALOR

BALANCE DE ENERGÍA

Aplicado un balance a la lámina de volumen WHdx, se obtiene, para la conducción del calor en la primera región:

$$q_{x01}\Big|_{x} WH - q_{x01}\Big|_{x+\Delta x} WH = 0$$

Que lleva a:

$$\frac{dqx_{01}}{dx} = 0$$

Integrando: $q_{01} = q_0$

Sabemos también que $q_{x01} = -k_{01}\dfrac{dT_{01}}{dx} = q_0$

ANÁLOGAMENTE

$$- k_{01} \frac{dT_{01}}{dx} = q_0$$

$$- k_{12} \frac{dT_{12}}{dx} = q_0$$

$$- k_{23} \frac{dT_{23}}{dx} = q_0$$

Siendo

- k_{01} , k_{12} y k_{23} constantes

INTEGRANDO

$$T_0 - T_1 = -q_0 \left(x0 - x1 / k01 \right)$$

$$T_1 - T_2 = -q_0 \left(x1 - x2 / k12 \right)$$

$$T_2 - T_3 = -q_0 \left(x2 - x3 / k23 \right)$$

EN LAS FRONTERAS

$$T_a - T_0 = q0 / h0$$

$$T_3 - T_b = q0 / h3$$

SUMANDO LAS ECUACIONES

$$T_a - T_b = q_0 \left(1/h0 + x1 - x0/k01 + x2 - x1/k12 + x3 - x2/k23 + 1/h3 \right)$$

$$q_0 = Ta - Tb/1/h0 + \sum i = 1 \uparrow 3 \; Xi - Xi - 1/Ki - 1,i + 1/h3$$

QUE PUEDE ESCRIBIRSE

$$q_0 = U(\, T_a - T_b\,)$$

ó

$$Q_0 = U\,(WH)\,(T_a - T_b)$$

Donde

$$U = \left(1/ho + \sum i{=}1 \upharpoonleft 3 \; xi{-}xi{-}1/ki{-}1,i \; + 1/h3\,\right)^{-1}$$

PERFIL DE TEMPERATURA

Es la ecuación que da la relación de la temperatura con la posición:

$T_0 - T_1 = -q_0\ (x0-x1/k01\ )$

$T_1 - T_2 = -q_0\ (x1-x2/k12\ )$

$T_2 - T_3 = -q_0\ (x2-x3/k23\ )$

Es diferente en cada capa

pero el flux es siempre el mismo

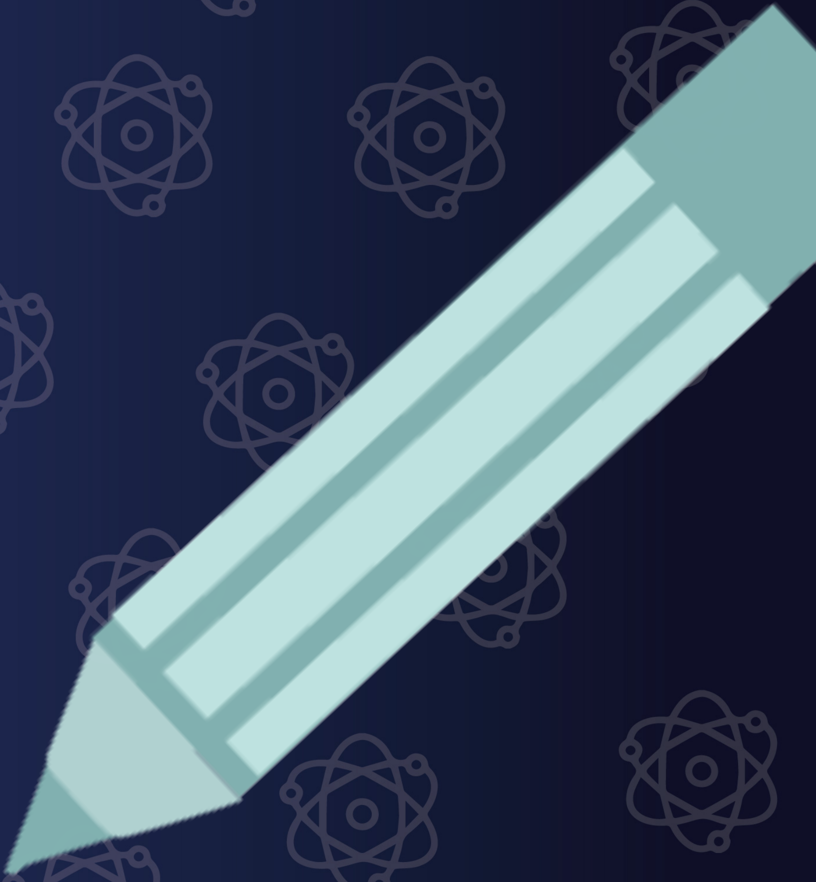
COMENTARIOS

PARA CUAQUIER PUNTO ENTRE X_0 Y X_1

$$T_0 - T_1 = -q_0 \,(x0 - x1 / k01\ )$$

$$T = T_0 + q0X0/K01\ - q0/k01\ x$$

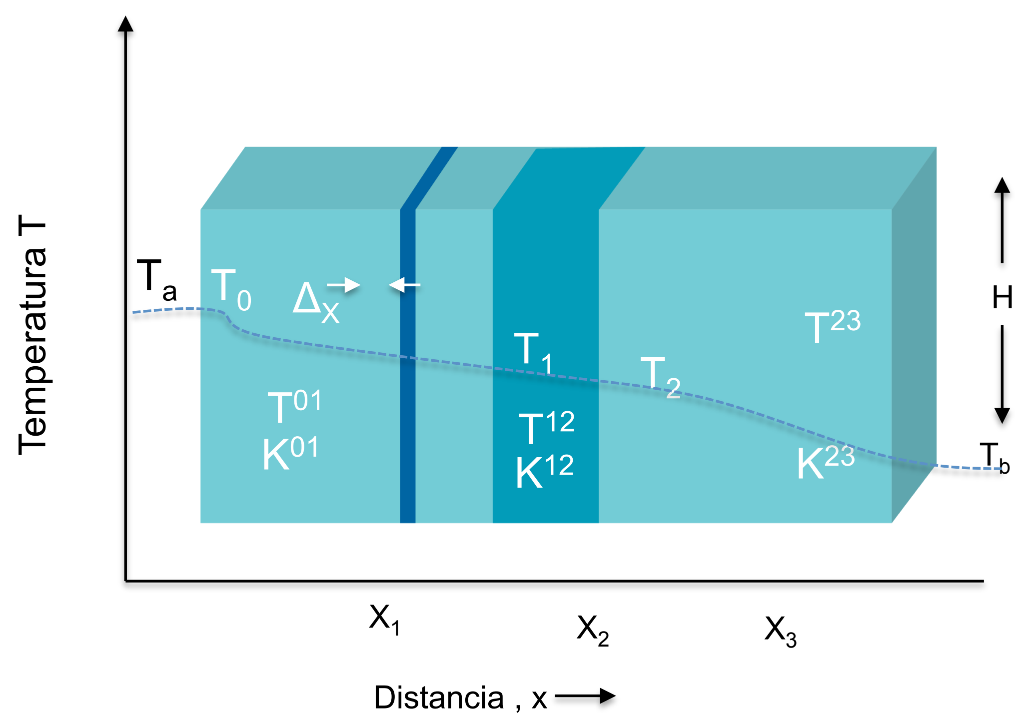
$$T = -\ q0/k01\ x + k01T0 + q0x0/k01$$



INTERPRETACIÓN

ECUACIÓN DE UNA RECTA:

- Pendiente $-q_0/k_{01}$
- Ordenada al origen $(K_{01}T_0 + q_0X_0)/K_{01}$
- Para poderlo calcular (graficar) es necesario antes conocer q_0
- En cada capa es una recta diferente.



Es el mismo a través de todos los materiales

$-k_{01}\; dT01/dx = q_0$

$-k_{12}\; dT12/dx = q_0$

$-k_{23}\; dT23/dx = q_0$

Se calcula a partir de la suma:

$$q_0 = Ta - Tb/1/h0 + \sum i=1 \uparrow 3\; Xi - Xi - 1/Ki - 1,i + 1/h3$$

Siendo k_{01}, k_{12} y k_{23} constantes

Estas mismas ecuaciones pueden usarse para el caso límite de una sola capa de material a través de la cual ocurre la conducción, haciendo i =1

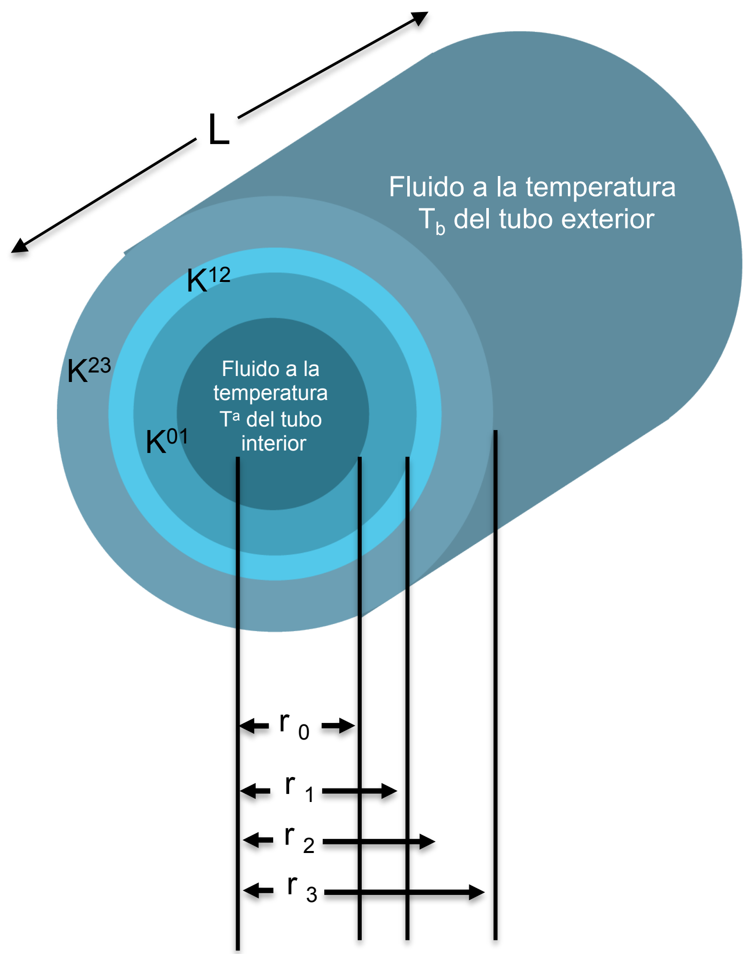
FLUX

Más comentarios

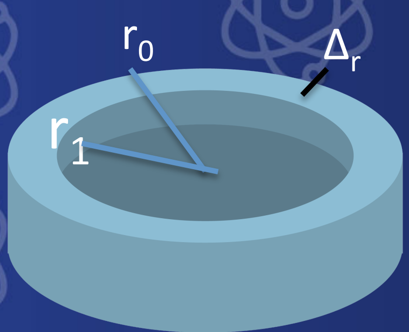
Estas mismas ecuaciones pueden usarse para el caso límite de una sola capa de material a través de la cual ocurre la conducción, haciendo i=1

Un ejemplo interesante de la aplicación del cálculo del perfil de temperaturas es el estudio del flux que emite una aleta. Ese análisis se presenta como tema suplementario en los recursos de esta semana.

PAREDES CIRCULARES

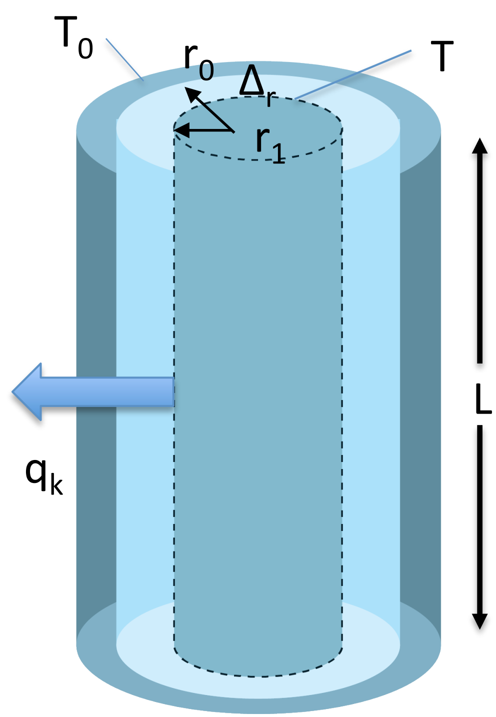


BALANCE DE ENERGÍA



Aplicado un balance a la sección de volumen $2\pi rL\ \Delta r$, se obtiene, para la conducción del calor en la primera región:

$$q_r \big|_r \ 2\pi rL - \ q_r \big|_{r+\Delta r} 2\pi (r + \Delta r) L = 0$$



Que lleva a:

$$\frac{d}{dr} (r\, q_{r)}) = 0$$

Integrando:

$$r\, q_r = r_0 q_0$$

Sabemos también que:

$$-k_{01} r \frac{dT_{01}}{dr} = r_0 q_0$$

ANÁLOGAMENTE

$$- k_{12} r \frac{dT_{12}}{dr} = r_0 q_0$$

$$- k_{23} r \frac{dT_{23}}{dr} = r_0 q_0$$

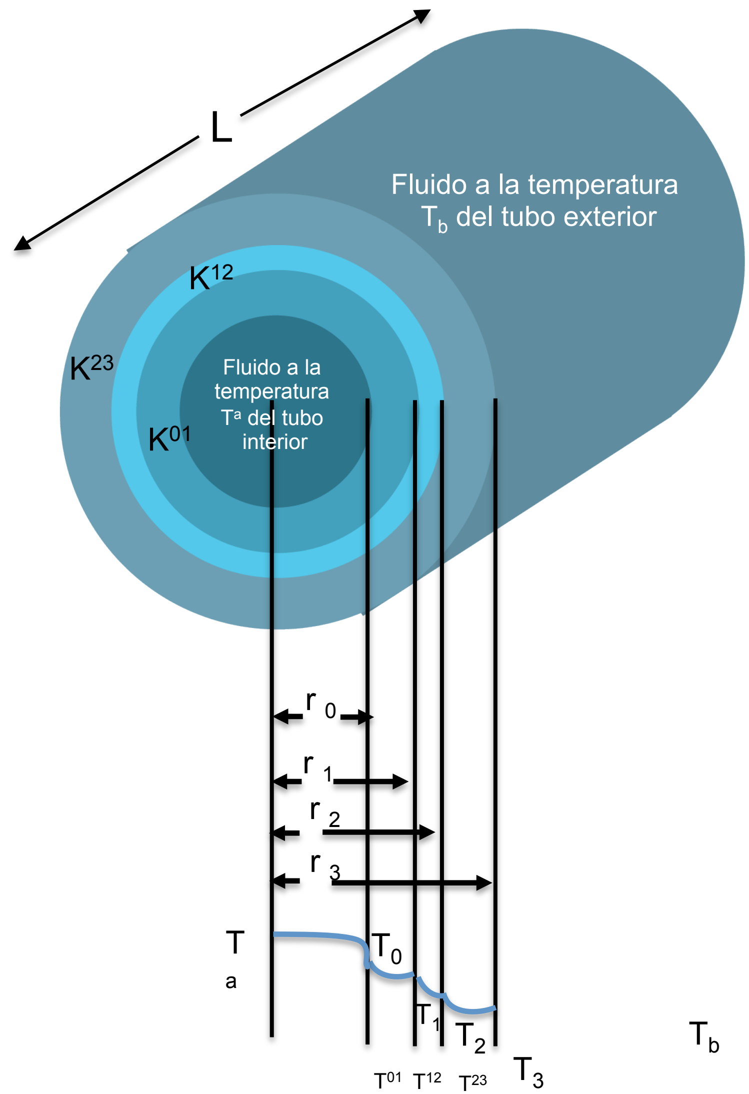
INTEGRANDO

$$T_0 - T_1 = r_0 q_0 \frac{\text{In } r_1 / r_0}{k_{01}}$$

$$T_1 - T_2 = r_0 q_0 \frac{\text{In } r_2 / r_1}{k_{12}}$$

$$T_2 - T_3 = r_0 q_0 \frac{\text{In } r_3 / r_2}{k_{23}}$$

GRAFICAMENTE



La convección en las fronteras:

T_a-T_0 = $q0/h0$

$qr = \mathrm{cte}$

$q_0\, r_o = q_3 r_3$

T_3-T_b = $q3/h3$ = $q0/h3$ $r0/r3$

EN LAS FRONTERAS

Flujo Total Q_0

$$Q_0 = 2\pi L r_0 q_0 = 2\pi L\,(Ta - Tb)/1/r0\ \ h0\ + In\,(r1/ro)/k01$$
$$+ In(r2/r1)/k12\ + In(r3/r2)/k23\ + 1/r3\ h3$$

Comentario: Aplica la analogía con las resistencias eléctricas. Hay una resistencia equivalente o total que se calcula como suma de las resistencias individuales.

Sumando

$$Q_0 = U_0\,(2\pi r_0 L)\,(T_a - T_b)$$

$$U_0 = r_0^{-1}\ (1/r0\ h0 + \sum i = 1 \uparrow 3\ \mathrm{ln}(\ r1/ri-1)/\ ki-1,i\ + 1/r3\ h3\ )^{-1}$$

PERFIL DE TEMPERATUTAS EN COORDENADAS CILÍNDRICAS

$$T_0\text{-}T_1 = r_0 q_0 \; (In(r1/r0)/k01\;)$$

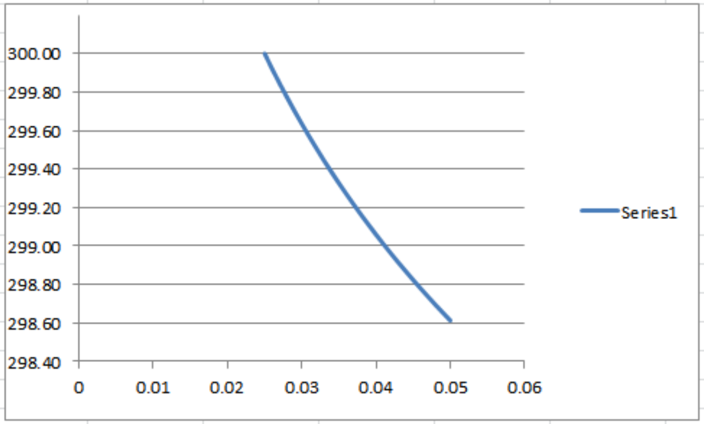
Lleva a:

$$T\text{-}T_0 = \text{-}r_0 q_0 \; (In(r/r0)/k01\;)$$

EJEMPLO

B2 =C$2-D$2*E$2*LN(A2/D$2)/F$2

	A	B	C	D	E	F
1	r	T	T_0	r_0	q_0	K_{01}
2	0.025	300.00	300	0.025	24	0.3
3	0.026	299.92				
4	0.027	299.85				
5	0.028	299.77				
6	0.029	299.70				
7	0.03	299.64				
8	0.031	299.57				
9	0.032	299.51				
10	0.033	299.44				
11	0.034	299.39				
12	0.035	299.33				
13	0.036	299.27				
14	0.037	299.22				
15	0.038	299.16				
16	0.039	299.11				
17	0.04	299.06				
18	0.041	299.01				
19	0.042	298.96				
20	0.043	298.92				
21	0.044	298.87				
22	0.045	298.82				
23	0.046	298.78				



RESUMEN

Balance macro	CARTESIANA	$qx01 \quad x \; WH \; - \; qx01 \quad x + \Delta x \; WH \; = \; 0$
	CILINDRICA	$qr^{01} \,\lvert r \quad 2\pi \, rL \; - \; qr^{\,01} \,\lvert r + \Delta r \quad 2\pi \,(r + \Delta r)\, L = 0$
Balance diferencial	CARTESIANA	$dqx01/dx = 0$
	CILINDRICA	$d/dr \; (rq_r^{\,01}) = 0$
Integración	CARTESIANA	$q_{01} = q_0$
	CILINDRICA	$rq^{r01} = r_0 q_0$
Ecuación	CARTESIANA	$q_x^{\,01} = -k^{01} dT01/dx$
	CILINDRICA	$-k^{01} r \; dT01/dr = r_0 \, q_0$
Solución	CARTESIANA	$T_0 - T_1 = -q_0 \; (x0 - x1/k01\;)$
	CILINDRICA	$T_0 - T_1 = r_0 q_0 \; (In(r1/r0)/k01\;)$

SEMEJANZAS:

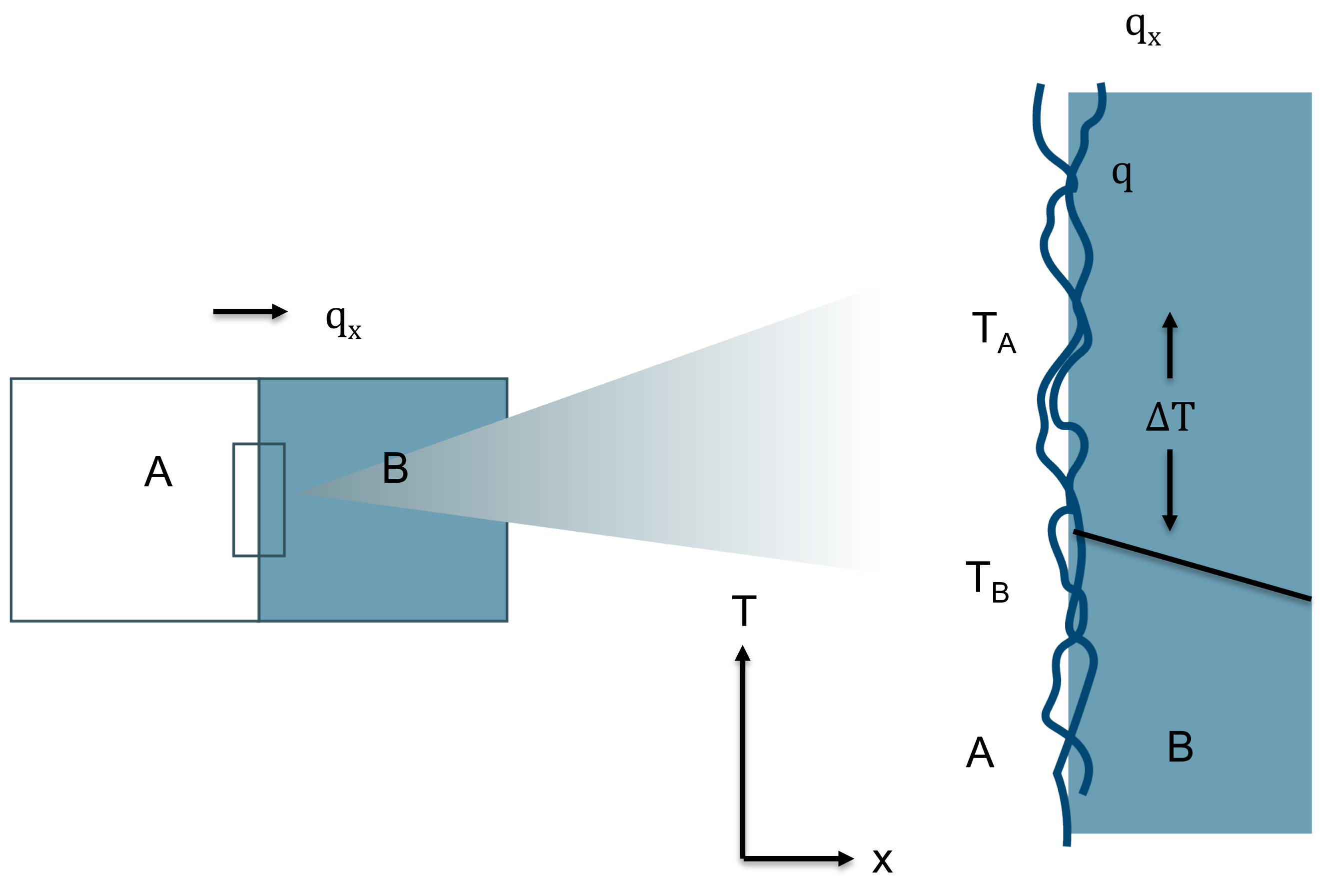
- En ambos casos se trata de un fenómeno de conducción a través de capas sucesivas.
- Se resuelve efectuando un balance de energía sin fuentes.

DIFERENCIAS:

- En el caso del cilindro, la superficie varia con la distancia. En el caso rectangular, no.
- Cada caso lleva a una ecuación diferencial diferente.
- En uno la resistencia térmica es constante.
- En el otro varía con el inverso de la distancia.
- La integral de 1/r es ln(r)

DIFERENCIAS Y SEMEJANZAS

RESISTENCIA DE CONTACTO



DATOS PARA "R"

TABLE 3.2 Thermal resistance of representative solid/solid interfaces

Interface	$R''_{t,c} \times 10^4$ $(m^2 \cdot K/W)$	Source
Silicon chip/lapped aluminum in air (27–500 kN/m^2)	0.3–0.6	[2]
Aluminum/aluminum with indium foil filler (~ 100 kN/m^2)	~0.07	[1, 3]
Stainless/stainless with indium foil filler (~ 3500 kN/m^2)	~0.04	[1, 3]
Aluminum/aluminum with metallic (Pb) coating	0.01–0.1	[4]
Aluminum/aluminum with Dow Corning 340 grease (~ 100 kN/m^2)	~0.07	[1, 3]
Stainless/stainless with Dow Corning 340 grease (~ 3500 kN/m^2)	~0.04	[1, 3]
Silicon chip/aluminum with 0.02-mm epoxy	0.2–0.9	[5]
Brass/brass with 15-μm tin solder	0.025–0.14	[6]

TIPOS DE PREGUNTAS

VARIABLES:

•El Flux
•La resistencia (conductividad)
•La temperatura

TOMA DE DECISIONES:

•Condiciones de operación
•Mayor economía

Un tubo de acero de 4 pulgadas de diámetro interior y 4.5 de diámetro exterior, se aísla con una capa de ¾ de pulgada de fibra de vidrio. La superficie interior del tubo está a 400 °F y la superficie exterior de fibra de vidrio a 90 °F. Determina cuál es la tasa de transferencia de calor por unidad de longitud del tubo. Utiliza para la conductividad del acero el valor de k=30 BTU/hr-ft-°F y para la fibra de vidrio k=0.032 en las mismas unidades.

Referencia: The Transport Phenomena Problem Solver.

EJEMPLO 1. FLUX A TRAVÉS DE UNA PARED COMPUESTA CIRCULAR

SOLUCIÓN

Utilizamos la ecuación:

$$Q_0 = 2\pi L r_0 q_0 = 2\pi L\,(Ta - Tb)/1/r0\ \ h0\ + In\,(r1/ro)/k01\ + In(r2/r1)/k12\ + In(r3/r2)/k23\ + 1/r3\ h3$$

Con las condiciones del problema:

$$= 2\pi\,(T1 - T3)/1/kt ln(r2/r1) + 1/kf ln(r3\ /r2)$$

SUSTITUYENDO VALORES NUMÉRICOS

$$= \frac{2\pi\,(400 - 90)}{\frac{1}{30}\ \ln\frac{2.25}{2} + \frac{1}{0.032}\ In\ \frac{3.0}{2.25}}$$

$$= \frac{2\pi \times 310}{0.00393 + 8.9901}$$

$$= 216.56 \text{ Btu / hr- ft}$$

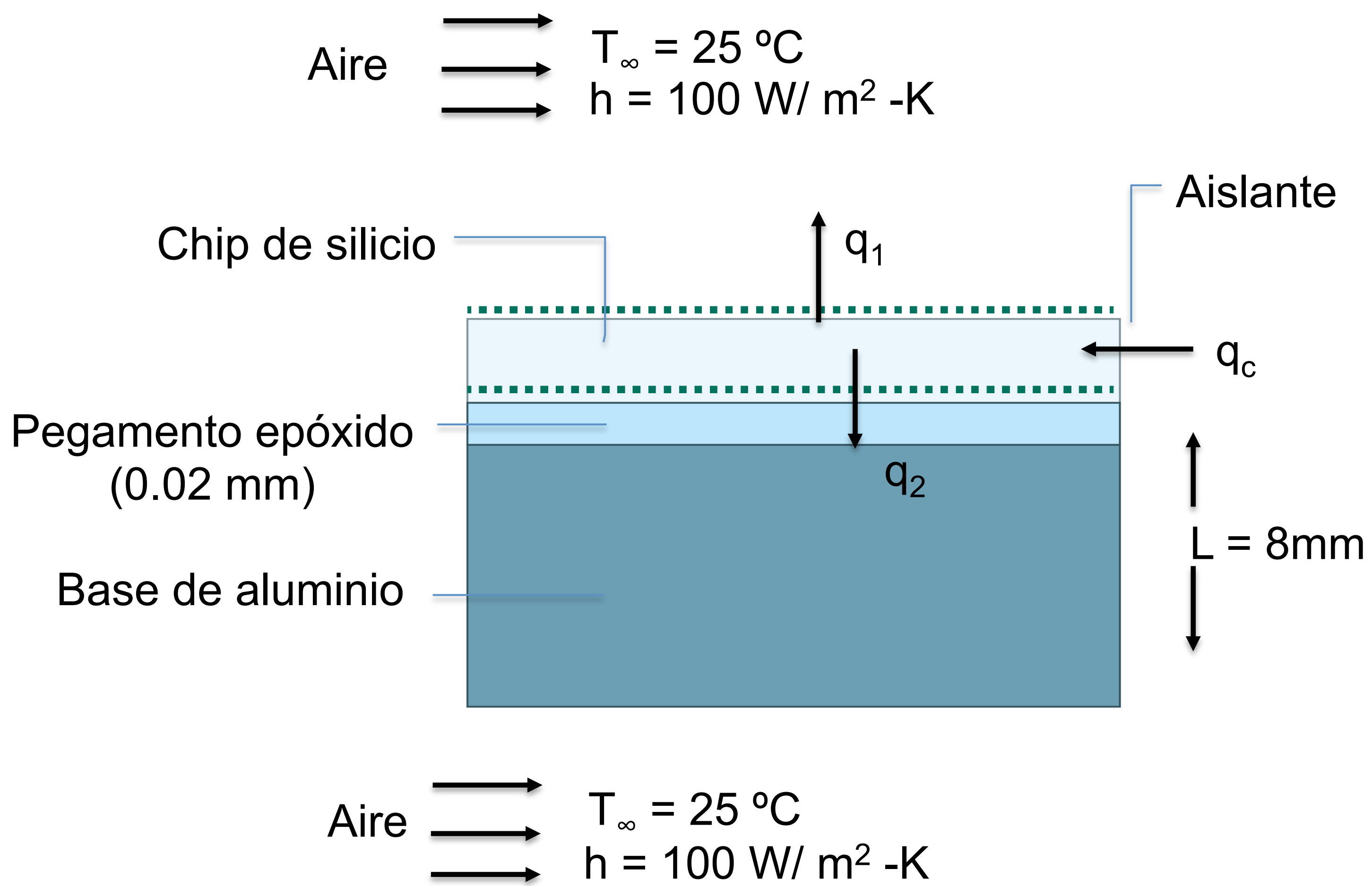
EJEMPLO 2.

LÍMITES DE OPERACIÓN TÉRMICA

Un chip de silicio y su base de aluminio están separados por un pegamento epóxico de espesor 0.02mm. El chip y su base tienen 10 mm de largo y son enfriados por una corriente de aire a 25 ^{o}C Con un coeficiente de convección de 100 W/m^{2} ^{o}K Si el chip disipa energía a una tasa de 10^{4} W/m^{2} ¿Podrá operar correctamente, si el límite máximo de temperatura que tolera es de 85 ^{o}C?

Nota: La conductividad el Aluminio a 350 K es de 239 W/m K
Referencia: Incropera, "Fundamentals of heat and mass transfer"

Diagrama



Aire
T_∞ = 25 ºC
h = 100 W/ m^2 -K
Aislante
Chip de silicio
q_1
q_c
Pegamento epóxido
(0.02 mm)
q_2
L = 8mm
Base de aluminio
Aire
T_∞ = 25 ºC
h = 100 W/ m^2 -K

El flujo total de calor q_c tiene dos partes: q_1 que es el calor cedido hacía arriba por convención:

$$Tc - T\infty \,/\, (1/h)$$

q_2 que es el calor cedido hacía abajo por contacto, conducción y convección.

$$Tc - T\infty \,/ R\, t,c + (L/K) + (1/h)$$

Con lo que:

$$q_c = Tc - T\infty \,/ (1/h) + Tc - T\infty / R\, t,c + (L/K) + (1/h)$$

SOLUCIÓN

SOLUCIÓN

$$T_c = T_\infty + q''_c \left[h + \frac{1}{R_{t.c} + (L/k) + (1/h)} \right]^{-1}$$

$$T_c = 25°C + 10^4\, W/m^2$$

$$x \left[100 + \frac{1}{(0.9 + 0.33 + 100)x\; 10^{-4}} \right]^{-1} m^2 \cdot K/W$$

$$T_c = 25°C + 50.3°C = 75.3°C$$

REFERENCIAS

Bird. Transport Phenomena