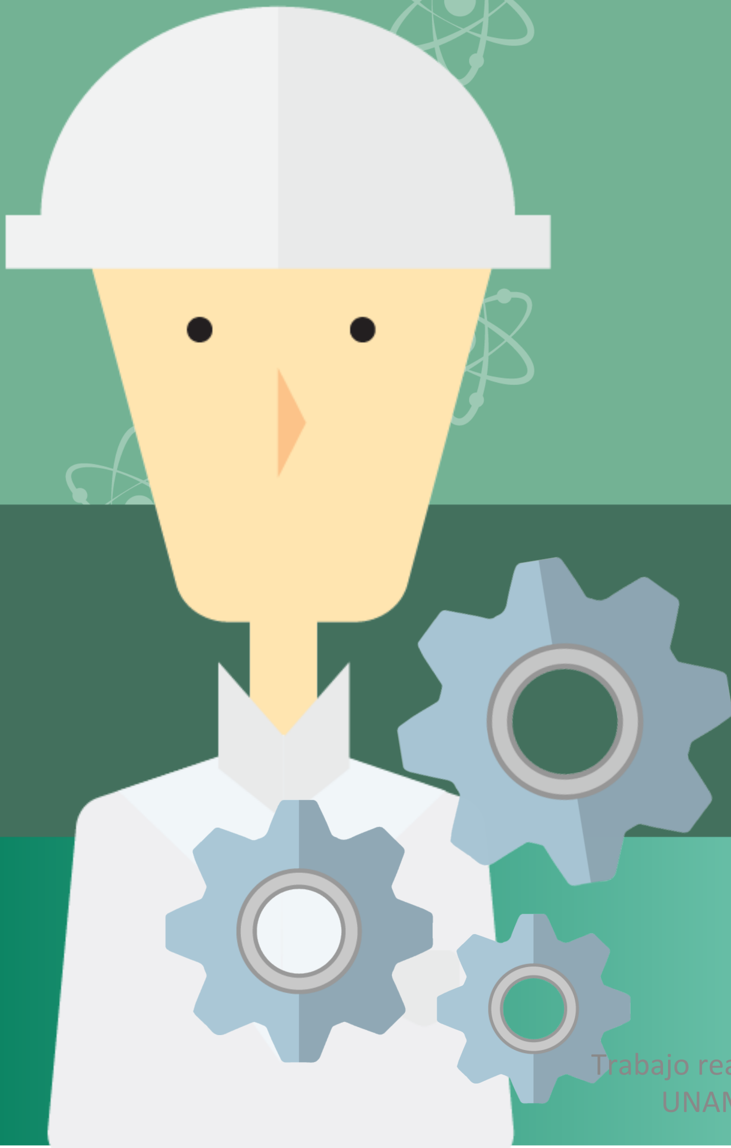


PRIMER REPASO

UNIDADES 1 Y 2

Trabajo realizado con el apoyo del Programa
UNAM-DGAPA-PAPIME PE110517

Educación es aquello que nos queda cuando hemos olvidado todo lo que nos enseñaron.

TEMAS

1/3

INTRODUCCIÓN

- El rol del ingeniero
- Mecanismos de transporte de energía
    - Conducción, convección y radiación

ESCRITURA DE LAS ECUACIONES DE TRANSPORTE

- Enfoque Lagrangiano
- Enfoque Euleriano

SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DE TRANSPORTE

- **CAPA LÍMITE**
    - Hidrodinámica. Perfil de velocidades
    - Térmica. Perfil de temperaturas

SEMEJANZA

- Números adimensionales
- Teorema π

TEMAS

2/3

TRANSPORTE DE CALOR POR CONDUCCIÓN EN ESTADO ESTACIONARIO

- Gradiente, Flujo, Flux
- Ecuación de Fourier
- Cálculo de los coeficientes de transporte k y μ
    - Gases
    - Líquidos
    - Sólidos

BALANCE DE ENERGÍA

- **SIN FUENTES INTERNAS**
    - ALETAS
        - Coordenadas cartesianas
        - Coordenadas cilíndricas
    - PAREDES COMPUESTAS
        - Coordenadas cartesianas
        - Coordenadas cilíndricas

.

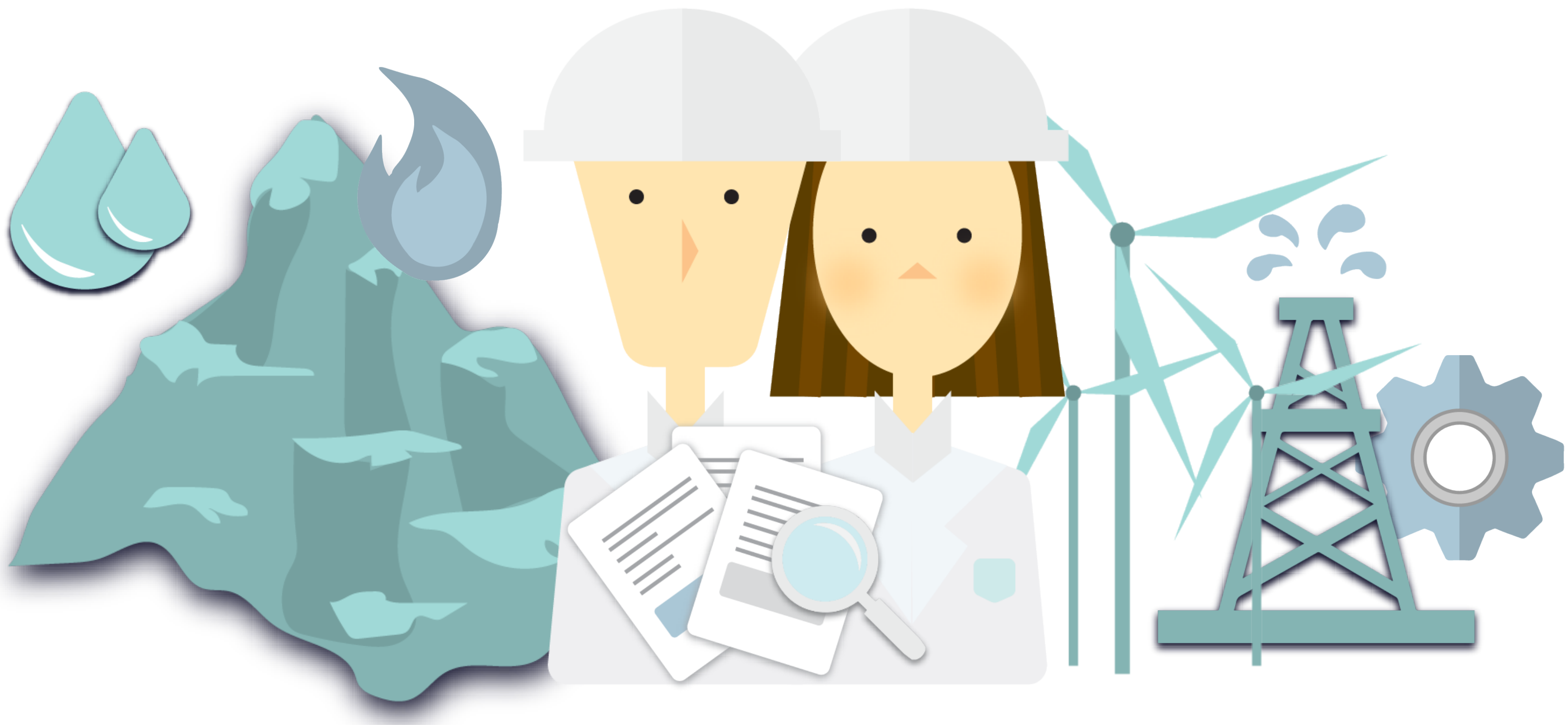
TEMAS

3/3

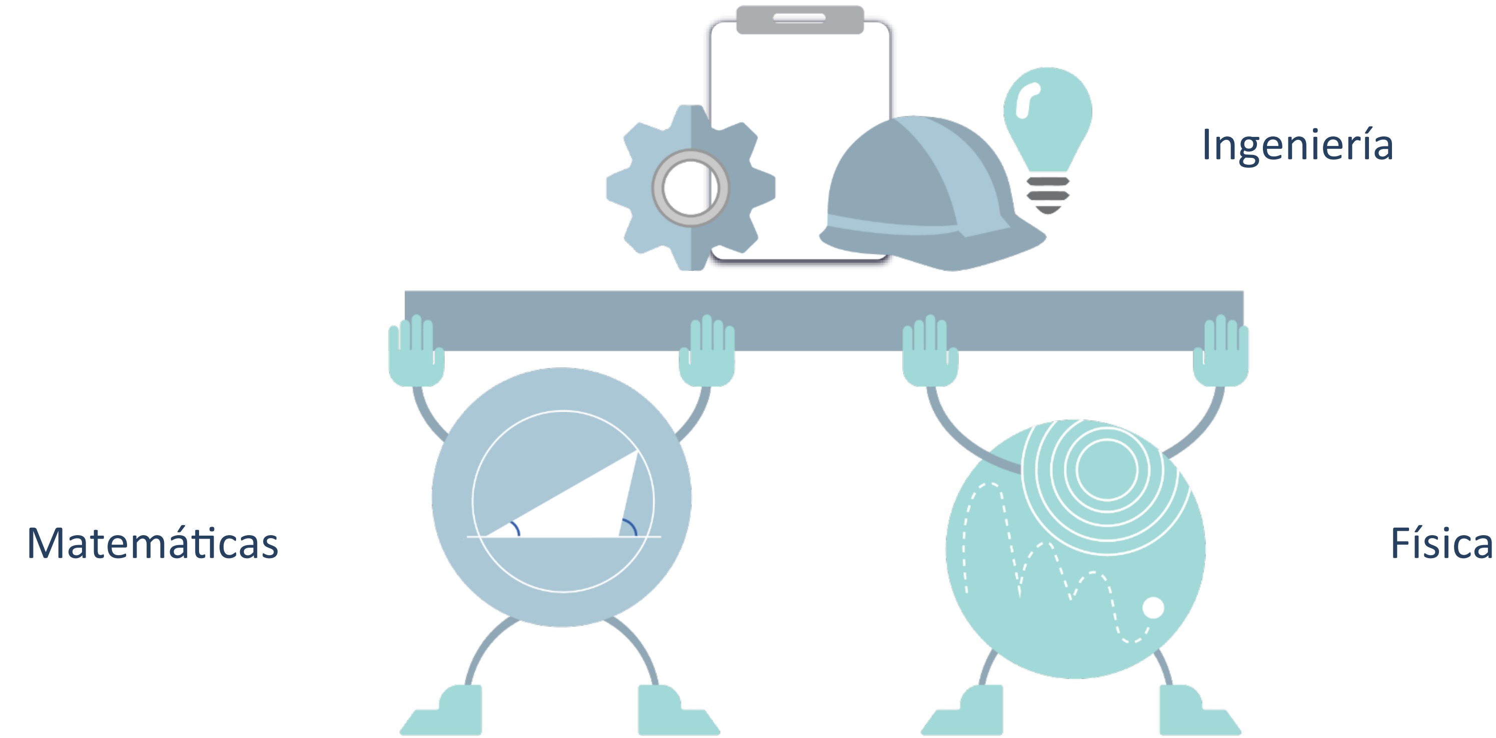
TRANSPORTE DE CALOR POR CONDUCCIÓN EN ESTADO ESTACIONARIO

- **CON FUENTES INTERNAS**
    - Efecto Joule
    - Viscosidad
    - Reacción química
    - Reacción nuclear

¿Qué es un ingeniero?



Es el **eslabón** entre la **materia prima** y el **producto terminado**



Para hacer buena Ingeniería se requiere conocer las leyes de la física:
•Mecanismos de transferencia de calor.
•Balance de energía,
•Balance de cantidad de movimiento,
•Balance de masa.

Para expresar esas leyes se requiere un lenguaje matemático: campos escalares y vectoriales, cálculo de varias variables…

ECUACIONES DE BALANCE PARA UN FLUJO EN MOVIMIENTO

(Partícula y medio continuo)

Física de la partícula	**Medio continuo**
Conservación de la masa M= Cte.	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) = 0$
Conservación de la energía Ec + Ep = Cte.	$\rho\, C_p \frac{DT}{Dt} = k\nabla^2 T - T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho (\nabla \cdot u) + \mu \varphi_u$
Conservación del momento dp/dt = 0.	$\rho \frac{DU}{Dt} = -\nabla P - [\nabla \cdot \tau] + \rho g$

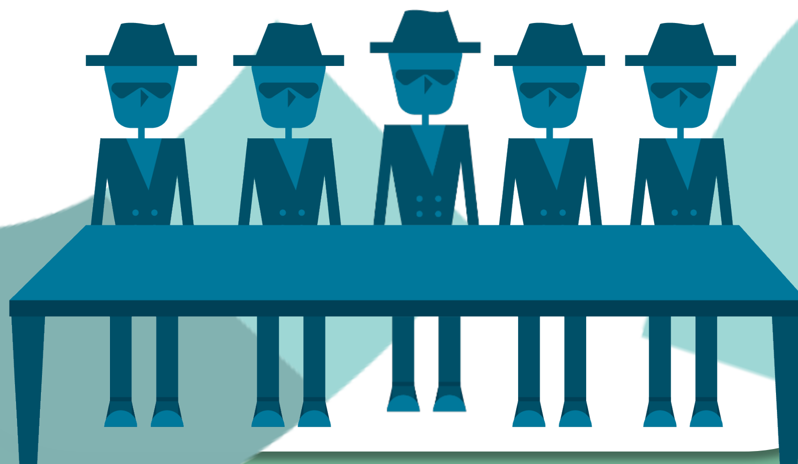
¿QUÉ ESPERAMOS QUE SEPAN Ó PUEDAN HACER?

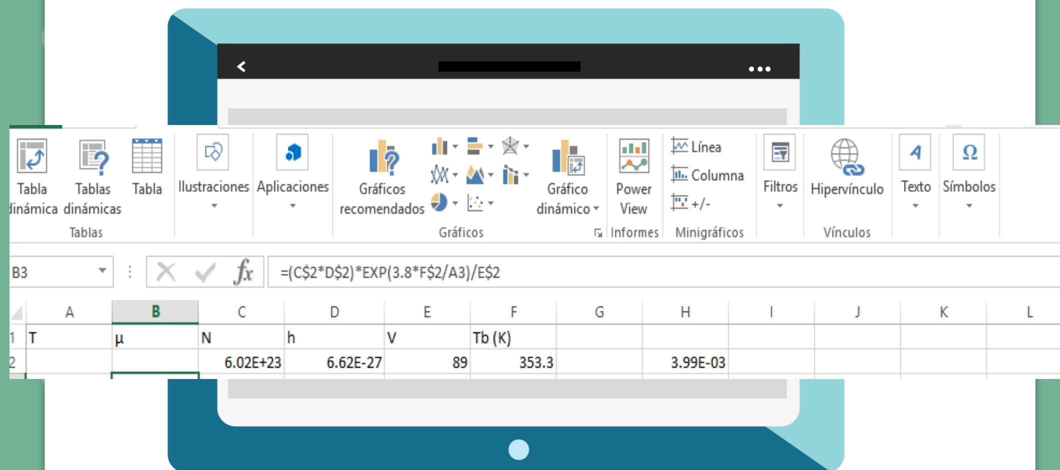
¿Plantear las ecuaciones de balance en forma diferencial?

No, la mayor parte de los casos de interés ya están planteados
Es más importante conocer las diferentes categorías de problemas
Y distinguir a cuál corresponde un problema dado.

¿Plantear las condiciones a la frontera (valores de la temperatura y flujo en las superficies)?

Eso sí, porque la ecuación representa una familia de problemas, plantear las condiciones, singulariza uno de ellos.





Obtener los perfiles de temperatura, el flujo y el flux que corresponda

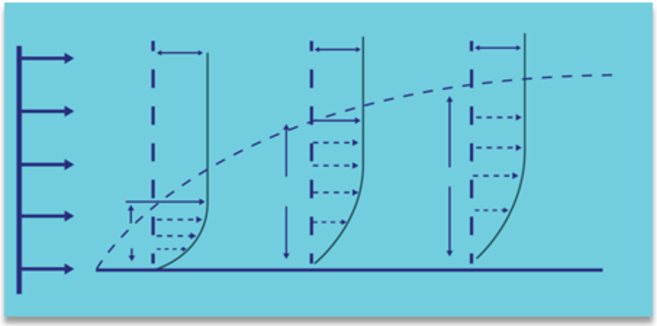
Es decir resolver las ecuaciones.
Para eso pueden servirse de

- Simuladores
- Hojas de Excel,
- Gráficas…

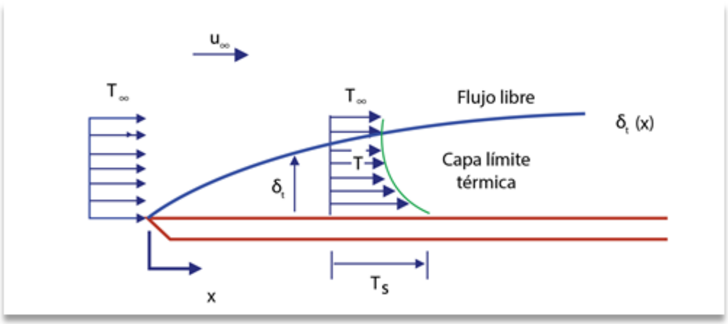
Hacerlo a mano, es cansado, riesgoso y no siempre funciona

CAPA LÍMITE

Región donde están presentes los gradientes de velocidad
o temperatura. Zona “cercana” a un objeto.



Hidrodinámica: Gradientes
de velocidad.



Térmica: Gradientes
de temperatura.

$$u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = \gamma \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y}$$

$$\frac{\gamma}{\alpha} = \mathrm{Pr}$$

$$u \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial^2 y}$$

Resolver la ecuación (vectorial) de transporte de momentum (Navier- Stokes) permite conocer el campo (vectorial) de velocidades $\delta = 4.64/Re1/2\ \ x$

Resolver la ecuación de transporte de energía permite conocer el campo de temperaturas.

$$\delta_t = 0.976\ \mathrm{Pr}^{1/3}\ \delta$$

¿CUÁLES SON LAS EXPRESIONES MATEMÁTICAS DE ESOS CAMPOS?

Para la velocidad se propone un polinomio de tercer grado:

$$U(y) = \mathbf{3/2\ U\infty/\boldsymbol{\delta}}\ y - \ \mathbf{U\infty/2\boldsymbol{\delta}3}\ \ y^3 \qquad \delta = \mathbf{4.64/\boldsymbol{Re}1/2}\ \ x$$

Que satisface las condiciones de frontera:

$$U(y)_{y=0} = 0 \quad U(y)_{y=\delta} = U_\infty \quad y \quad \boldsymbol{\partial u/\partial y}\ |_{y=\delta} = 0$$

Para la temperatura se propone un polinomio de tercer grado

$$T(y) = Ts + 3/2\ (T\infty - Ts)/\delta t\ \ y - (T\infty - Ts)\ /2\delta t3\ \ y^3 \qquad \delta_t = 0.976\ Pr^{1/3}\ \delta$$

Que satisface las condiciones de frontera:

$$T(0)=T_s \qquad \boldsymbol{d2T/dy2}\ \ |\boldsymbol{y}=\mathbf{0}=\mathbf{0} \qquad T(\delta_t)=T_\infty \qquad y \qquad \boldsymbol{\partial T/\partial y}\ _t = 0$$

TEOREMA π DE BUCKINGHAM

Sea:

•***m***: Variables homogéneas; por ejemplo: diámetro (*D*), velocidad (*v)*, Temperatura (T), longitud (*L*), presión (*P*), …

•***n***: Dimensiones de referencia longitud [*L*], tiempo [*t*], masa [*M*], temperatura [*T*]…

Entonces se obtendrán:
(m-n): Números adimensionales π

$\pi_1 = hD/k$	**NUSSELT**
$\pi_2 = U\infty D\rho/\mu$	REYNOLDS
$\pi_3 = c\rho\mu/K$	PRANDTL

$\pi_4 = g\beta(T - T\infty)L3/v2$ Grashof $\mu V^2/k(T_1 - T_0)$ Brinkman

LOS TRES ELEMENTOS DE LA ECUACIÓN DE TRANSPORTE

$$q_E = - K_E \; dV/dZ$$

Flux = Conductividad X Gradiente

- Gradiente = Desequilibrio de una magnitud física
- Conductividad = Propiedad del material que es una medida de la facilidad con la que ocurre el flujo..
- Flujo = Cantidad que se desplaza (de materia, electrones, energía..) por unidad de tiempo.

V = R I

1 2 3

Ley de Fourier

$$q = - K_q \; \Delta T/\Delta Z$$

PERFIL DE TEMPERATURA

Es la ecuación que da la relación de la temperatura con la posición.

$$T = T_0 + q_0 (x0 - x / k)$$

$$T = T_0 + r_0 q_0 \frac{\ln (r / r_0)}{k}$$

Ecuación de una recta: $y = mx + b$

Pendiente:

$$-q_0 / k_{01}$$

Ordenada al origen

$$T_0 + (q_0 X_0) / K$$

$$T = - q0/k01\ x + k01\ T0 + q0\ x0/k01$$

VARIACIÓN DE LOS COEFICIENTES DE TRANSPORTE

- Los coeficientes de transporte, como la viscosidad de los líquidos y de los gases o la conductividad de los metales y los no metales, varían:

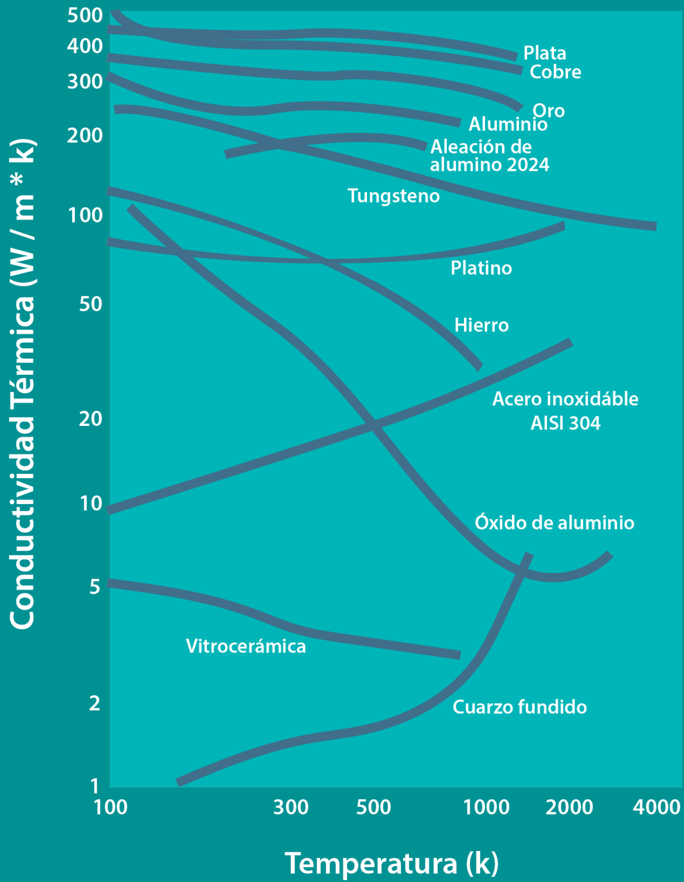
  - De un material a otro.

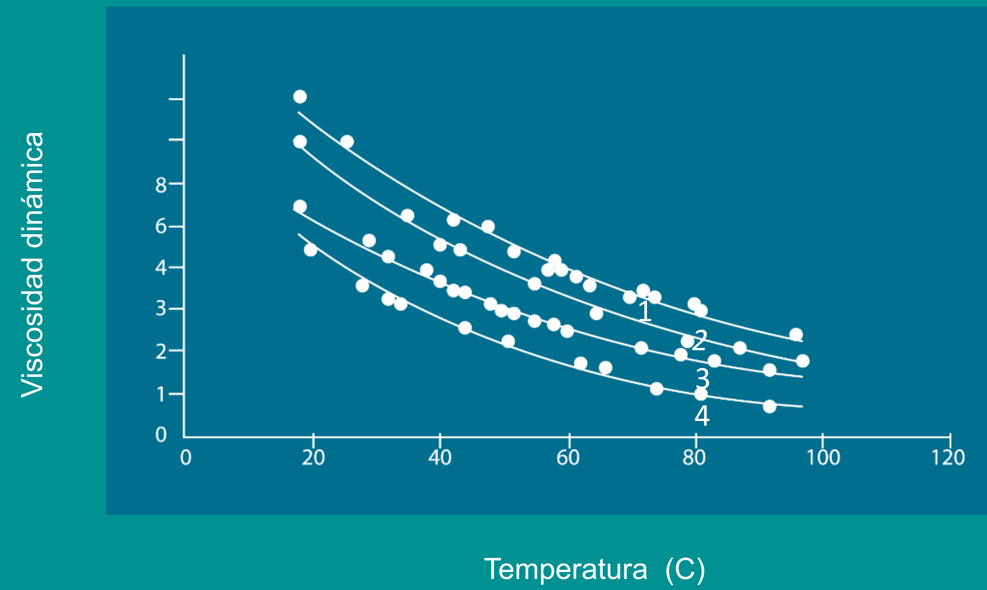
  La cantidad transportada por unidad de área y de tiempo (flux), para un mismo gradiente, depende del material, es decir de su coeficiente de transporte.

  - Para un mismo material.

  Con la temperatura.

GRÁFICAS





Atención: Rangos / Tendencias.

CÁLCULO Y VALORES NUMÉRICOS DE k Y μ (GASES)

Desarrollar fórmulas para calcular la conductividad y la viscosidad, de los gases en función de la temperatura requiere de algún modelo sobre la estructura de la materia:

$E = E_c + E_p$

$E_C = 1/2\ mv^2$ siempre independientemente del modelo que se proponga

E_p depende del modelo que se proponga

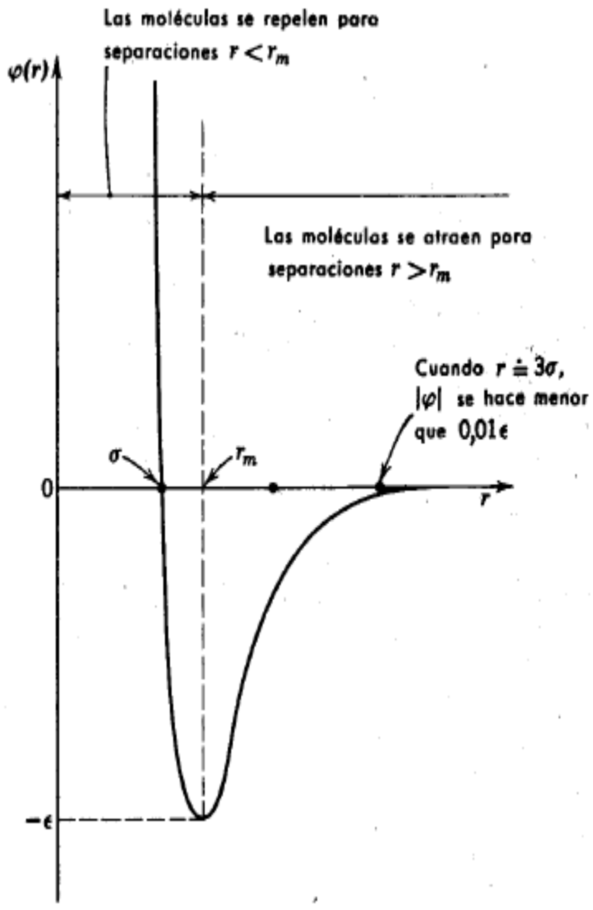
La propuesta más simple es $E_p = 0$ (esferas rígidas)

Más realista es el potencial de Lennard-Jones $\varphi(r) = 4\varepsilon[(\sigma/r)12 - (\sigma/r)6]$

Tanto para los gases como para los sólidos puede (debe) emplearse la Mecánica estadística (Clásica y cuántica)

ε y σ

En libros como el *Incropera y el Bird* vienen extensas tablas tanto para valores de Κ y μ para diferentes materiales, como de diversos parámetros necesarios para su cálculo a partir de modelos de transporte.



Gas de esferas rígidas.

El movimiento de un conjunto de esferas rígidas de diámetro d, masa m y n moléculas por unidad de volumen puede modelarse si se conocen el recorrido libre medio

y la velocidad promedio de la partícula:

En ese caso la conductividad térmica y la viscosidad pueden escribirse con base en esos parámetros:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}$$

$$u = \frac{\sqrt{8kT}}{\pi m}$$

Ejemplo. Calcular el recorrido libre moléculas de Oxigeno a 300 K.

Solución: Primero debemos calcular n, el número de partículas de Oxigeno por unidad de volumen N/V.

Asumimos que el gas es ideal: PV =nKT
Entonces:
N/V = n = P/Kt. Sustituyendo en la fórmula del recorrido libre medio:

$$\lambda = 1/\sqrt{2}\ \pi d2N/V \quad = \frac{kT/\sqrt{2}}{\pi d2p}$$

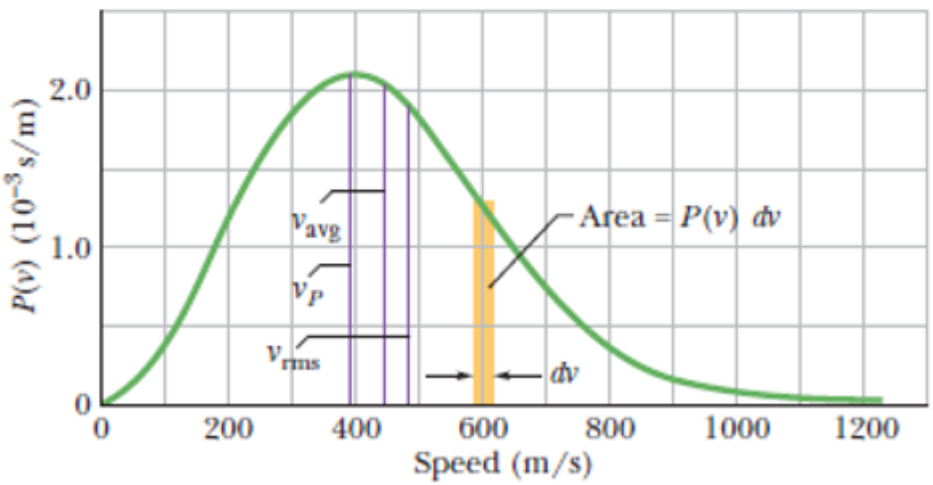
$$= (1.38 \times 10-23\ \mathrm{J/K})\ (300\ \mathrm{K})/\sqrt{2}\ \pi(2.9\ X10-10\ \mathrm{m})2\ (1.01 \times 105\ \mathrm{Pa}) = 1.1 \text{ X } 10^{-7}$$

Alrededor de 380 diámetros moleculares

La función de distribución de velocidades de Maxwell

$$P(\mathrm{v}) = 4\pi\left(\frac{M}{2\pi RT}\right)^{3/2} v^2 e^{-Mv^2/2RT}$$

multiplicada por la diferencial de velocidades dv proporciona la fracción de moléculas con velocidades en ese intervalo.



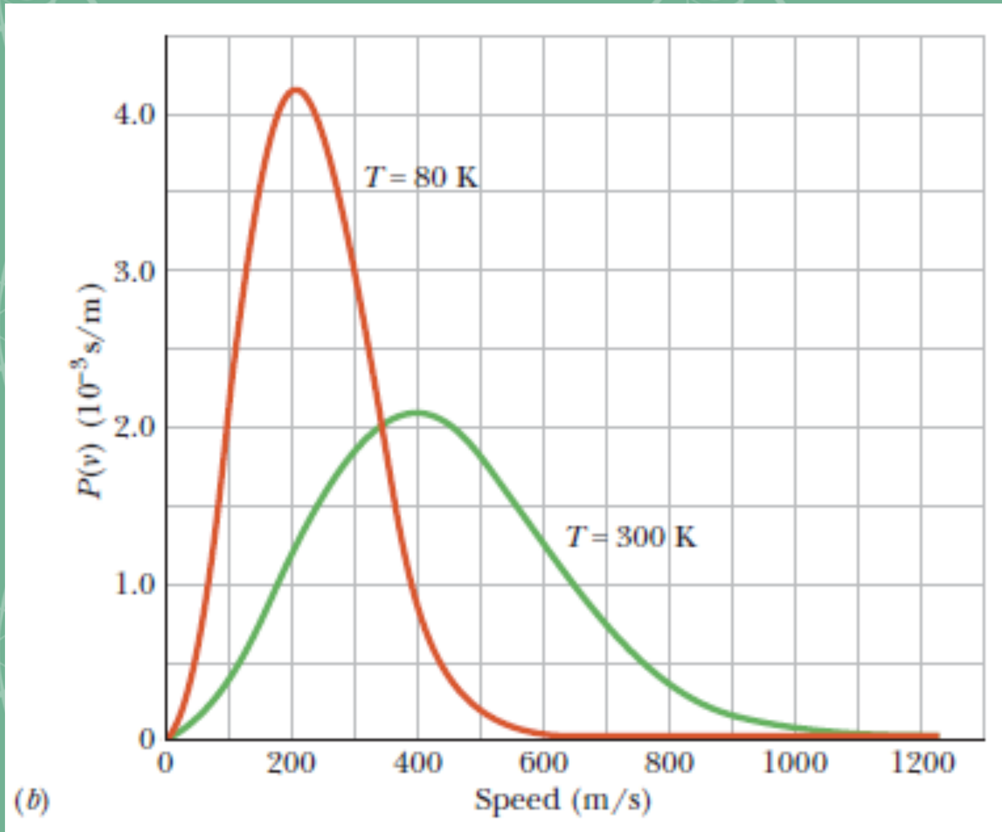
Función de distribución de velocidades para moléculas de Oxígeno a 300 K.
Se muestran en la gráfica las tres velocidades características: la, la velocidad promedio, más probable y la RMS

$$v_{avg} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \quad \text{(average speed)},$$

$$v_P = \sqrt{\frac{2RT}{M}} \quad \text{(most probable speed)}$$

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \quad \text{(rms speed)}.$$

Comentario: La constante de Boltzmann *k* vale: 1.38 X 10^{-23} J K^{-1} está relacionada con R la constante de los gases ideales por la fórmula R= N_A *k*. De donde se sigue que R= 8.314 J mol $^{-1}$ K^{-1}



$$V_{avg} = \int_0^\infty v\,P(v)\,dv.$$

$$V_{avg} = \sqrt{8RT/\pi M}$$

k y μ con un modelo de esferas rígidas (Gases)

$$k = 1/3 \;\; Cu\lambda_{mfp} \quad \mu = 1/3 \;\; nmu\,\lambda_{mfp} \quad = \; 1/3 \;\; \rho u\,\lambda_{mfp}$$

u Es la velocidad media del electrón $u = \sqrt{8kT/\pi m}$

C Es el calor especifico de los electrones por unidad de volumen $3/2 \; n \; k$

n Número de moléculas por unidad de volumen

λ_{mfp} Es el recorrido libre medio $\lambda = 1/\sqrt{2}\pi d2n$

k Constante de Boltzman

$k = 1/d2 \;\; \sqrt{k3T/\pi3m}$ $\quad \mu = 2/3\pi3/2 \;\; \sqrt{m\,kT}/d2$

Para cálculos más precisos de los coeficientes de transporte en gases, pueden utilizarse expresiones que requieren usar parámetros de los potenciales de Lennard-Jones. Existen tablas de estos valores.

$$k = 1{,}9891 \times 10^{-4} \sqrt{T/M} / \sigma 2\, \Omega k$$

$$\mu = 2{,}6693 \times 10^{-5} \sqrt{MT} / \sigma 2\, \Omega \mu$$

Κ Y μ USANDO EL POTENCIAL DE LENNARD - JONES

El significado de $\Omega\mu$

- El parámetro adimensional Ω_μ, es una función de la temperatura adimensional KT/ε.

- Si el gas estuviera hecho de esferas rígidas de diámetro σ, en lugar de moléculas con fuerzas de atracción y repulsión entre ellas, Ω_μ valdría exactamente uno.

- Ω_μ toma en cuenta los detalles de los caminos que las móleculas recorren en una collision binaria, puede por lo tanto interpretarse como una medida de la desviación del comportamiento de esfera rígida.

- Valores para Ω_μ pueden verse en las siguientes tablas.

Calcular la conductividad térmica del helio a 1 atm y 373.2K utilizando la fórmula y los parámetros de Lennard-Jones dados en clase.

$$k = 1{,}9891 \text{ x } 10^{-4}\ \sqrt{T}/ M / \sigma 2\ \Omega k$$

EJEMPLO

TABLA B-I

PARÁMETROS DE FUERZA INTERMOLECULAR Y CONSTANTES CRÍTICAS

Substancia	Peso Molecular M	Parámetros[a] de Lennard-Jones	
		σ (Å)	ϵ/κ (°K)
Elementos ligeros:			
H_2	2,016	2,915	38,0
He	4,003	2,576	10,2

CÁLCULO DE Ω

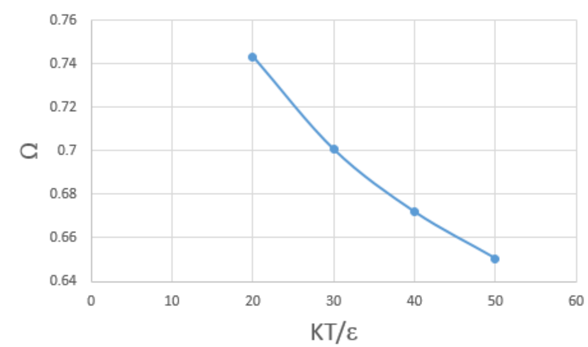
Con $\sigma = 2.576$ y $\varepsilon / k = 10.2$

Calculamos: $kT / \varepsilon = 36.59$

Usando las tablas:

FUNCIONES PARA LA PREDICCIÓN DE PROPIEDADES DE TRANSPORTE DE GASES A BAJA DENSIDAD[a]

$\kappa T/\epsilon$ o $\kappa T/\epsilon_{AB}$	$\Omega_\mu = \Omega_k$ (Para viscosidad y conductividad calorífica)
20.0	0.7432
30.0	0.7005
40.0	0.6718
50.0	0.6504



$\Omega_k = .68$

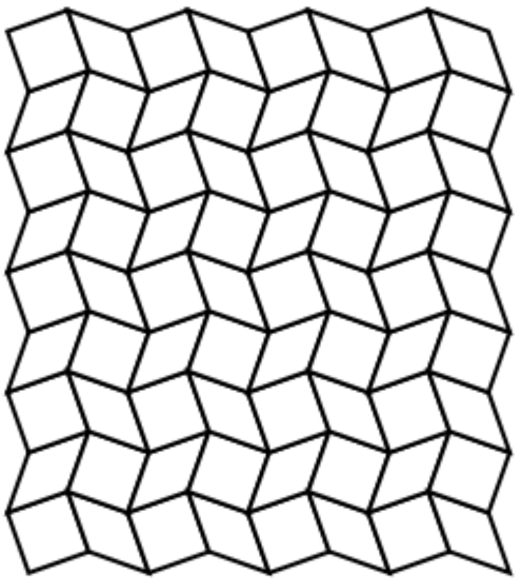
$$k = 1{,}9891 \times 10^{-4} \sqrt{T/M} / \sigma^2 \Omega_k$$

Sólidos

Un sólido es un malla (*lattice*) de átomos rodeados de electrones libres.

El transporte de energía térmica tiene dos causas:
El movimiento de los electrones libres (Puede modelarse como el de un gas de esferas rígidas).
La vibración de la malla

$K = K_e + K_f$



CONDUCTORES, NO CONDUCTORES Y ALEACIONES

- En los metales puros la conducción está dominada por el movimiento de los electrones y K_f es despreciable
- En los semiconductores y no conductores la vibración de la malla domina y el término K_f no puede seguir despreciándose.
- En las aleaciones y los sólidos no metálicos el valor de K_f se vuelve más importante.
- La regularidad de la malla tiene influencia en el valor de K_f
- Los sólidos de malla regular como el cuarzo tiene valores altos para la conductividad.
- El vidrio que es amorfo no tiene tan buena conductividad.

NANOMATERIALES

- Existe una longitud crítica λ_{cr} por debajo de la cual deben ser considerados los efectos de tamaño.

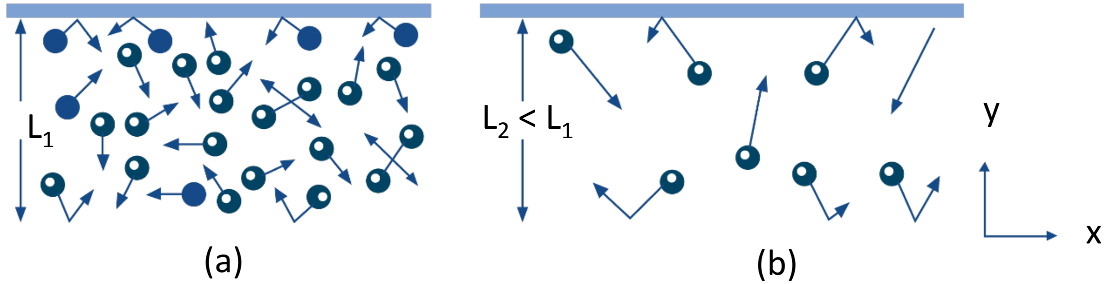
- En esos casos existe diferencia entre la conducción a lo largo de las dos direcciones X e Y.

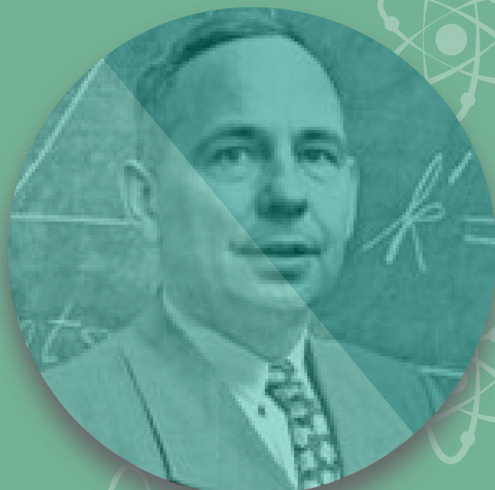
- Valores para K_x y K_y pueden ser calculados a partir de las relaciones siguientes, si se conoce k:

:

$$K_x / k = 1 - 2\lambda_{mfp} / (3\pi L)$$

$$K_y / k = 1 - 2\lambda_{mfp} / (3L)$$





k Y μ PARA LÍQUIDOS (EYRING)

Eyring a partir de la distribución de velocidades de las partículas propuso la siguiente fórmula, para la viscosidad de los líquidos:

$$\mu = Nh/V \; e^{-3.8T_b/T}$$

Donde N es el número de Avogadro, h la constante de Plank, V es el volumen de un mol del líquido y T_b la temperatura de ebullición.

EJEMPLO

Utiliza los siguientes datos, del benceno, para calcular y graficar su viscosidad en un intervalo de 0 a 70 ^{o}C.

$N = 6.023 \times 10^{23}$ (g . mol)$^{-1}$

$h = 6.624 \times 10^{-27}$ erg seg ó g cm^{2} seg^{-1}

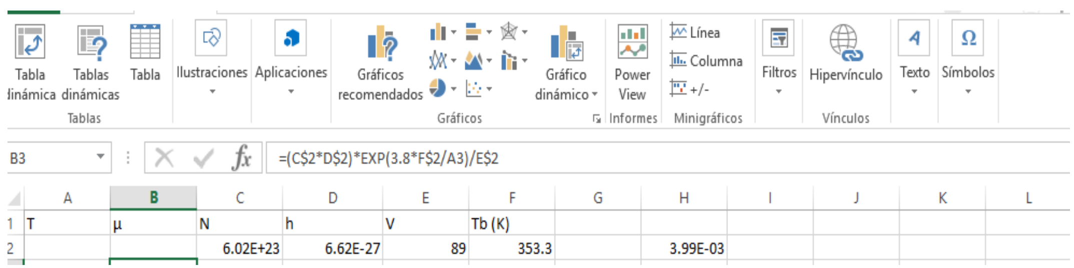
$V = 89.0$ cm^{3} (g . Mol)$^{-1}$ a 20 °C

$T_b = 273.2 + 80.1 = 353.3$ °K

SOLUCIÓN

$$\mu = {Nh}/{V} \; e^{-3.8 T_b / T}$$

Escribimos los datos en una hoja de cálculo…



…Y lo dejamos correr

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	T	μ	N	h	V	Tb (K)			
2			6.02E+23	6.62E-27	89	353.3		3.99E-03	
3	293	4.38E-03							
4	294	4.31E-03							
5	295	4.25E-03							
6	296	4.18E-03							
7	297	4.12E-03							
8	298	4.06E-03							
9	299	4.00E-03							
10	300	3.94E-03							
11	301	3.88E-03							
12	302	3.82E-03							
13	303	3.77E-03							
14	304	3.71E-03							
15	305	3.66E-03							
16	306	3.61E-03							
17	307	3.55E-03							
18	308	3.50E-03							
19	309	3.46E-03							
20	310	3.41E-03							
21	311	3.36E-03							
22	312	3.31E-03							
23	313	3.27E-03							

La conductividad térmica está relacionada con la conductividad eléctrica a través de la ley de Wiedemann- Franz.

$$K/\sigma = LT$$

L = 22-29 x10^{-9} Volts^2 K^{2}

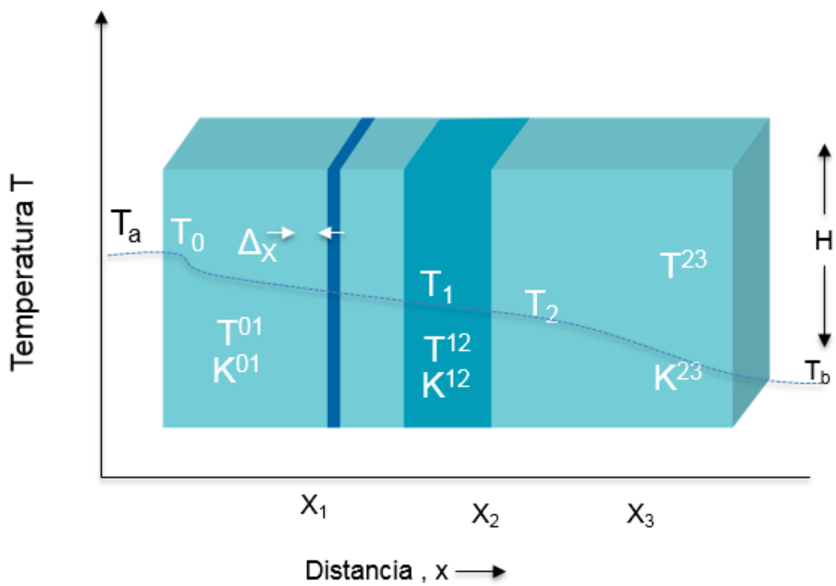
k = Coductividad térmica
L = Número de Lorenz
σ = Conductividad eléctrica

Por lo tanto una de ellas puede conocerse en función de la otra.

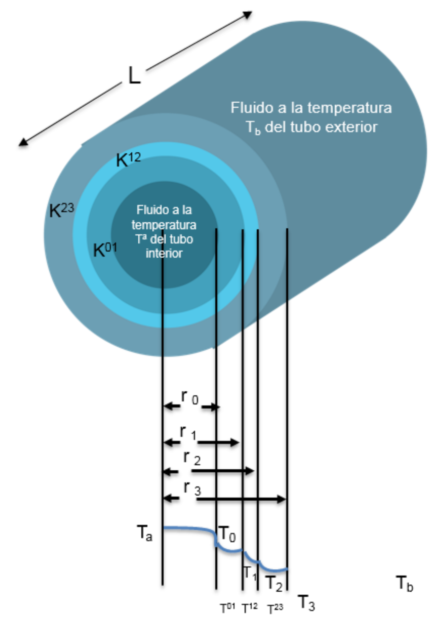
LEY DE WIEDEMANN-FRANZ

PAREDES COMPUESTAS. PROBLEMA

Cartesiana (paredes rectangulares)



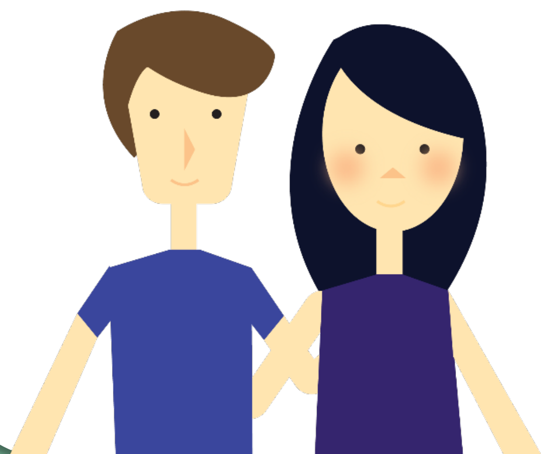
Cilíndrica



Se desea estudiar la transferencia de calor a través de una sucesión de capas de diferentes materiales, cuyas fronteras están en contacto con un fluido.

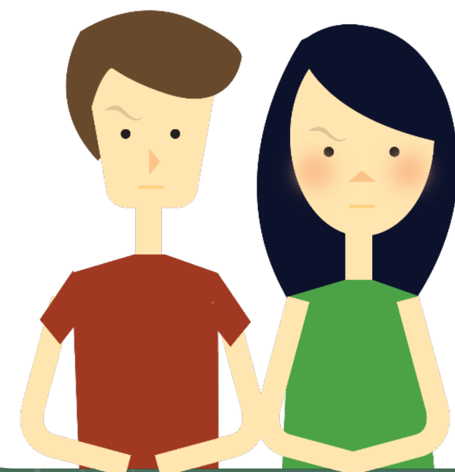
Semejanzas

- En ambos casos se trata de un fenómeno de conducción a través de capas sucesivas.
- Se resuelve efectuando un balance de energía sin fuentes.



Diferencias

- En el caso del cilindro, la superficie varia con la distancia. En el caso rectangular, no.
- Cada caso lleva a una ecuación diferencial diferente.
- La integral de $1/r$ es $\ln(r)$



RESUMEN

BALANCE MACRO	CARTESIANA	$qx01 \;\; x \;\; WH \; - \; qx01 \;\; x + \Delta x \; WH \; = \; 0$
	CILINDRICA	$qr^{01} \; \vert r \;\; 2\pi \, rL - \; qr^{\,01} \; \vert r + \Delta r \;\; 2\pi \, (r + \Delta r) \, L = 0$
BALANCE DIFERENCIAL	CARTESIANA	$dqx01/dx = 0$
	CILINDRICA	$d/dr \; (rq_r^{\,01}) = 0$
INTEGRACIÓN	CARTESIANA	$q_{01} = q_0$
	CILINDRICA	$rq^{r01} = r_0 q_0$
ECUACIÓN	CARTESIANA	$q_x^{\,01} = -k^{01} dT01/dx$
	CILINDRICA	$-k^{01} r \; dT01/dr = r_0 \, q_0$
SOLUCIÓN	CARTESIANA	$T_0 - T_1 = -q_0 \; (x0 - x1/k01 \;)$
	CILINDRICA	$T_0 - T_1 = r_0 q_0 \; (In(r1/r0)/k01 \;)$

EJEMPLO

Pared compuesta circular

Un tubo de acero de 4 pulgadas de diámetro interior y 4.5 de diámetro exterior, se aísla con una capa de ¾ de pulgada de fibra de vidrio. La superficie interior del tubo está a 400 °F y la superficie exterior de fibra de vidrio a 90 °F. Determina cuál es la tasa de transferencia de calor por unidad de longitud del tubo. Utiliza para la conductividad del acero el valor de k=30 BTU/hr-ft-°F y para la fibra de vidrio k=0.032 en las mismas unidades.

SOLUCIÓN

Utilizamos la ecuación:

$$Q_0 = 2\pi L r_0 q_0 = 2\pi L\,(Ta - Tb) / 1/r0\ h0\ + In(r1/ro)/k01\ + In(r2/r1)/k12\ + In(r3/r2)/k23\ + 1/r3\ h3$$

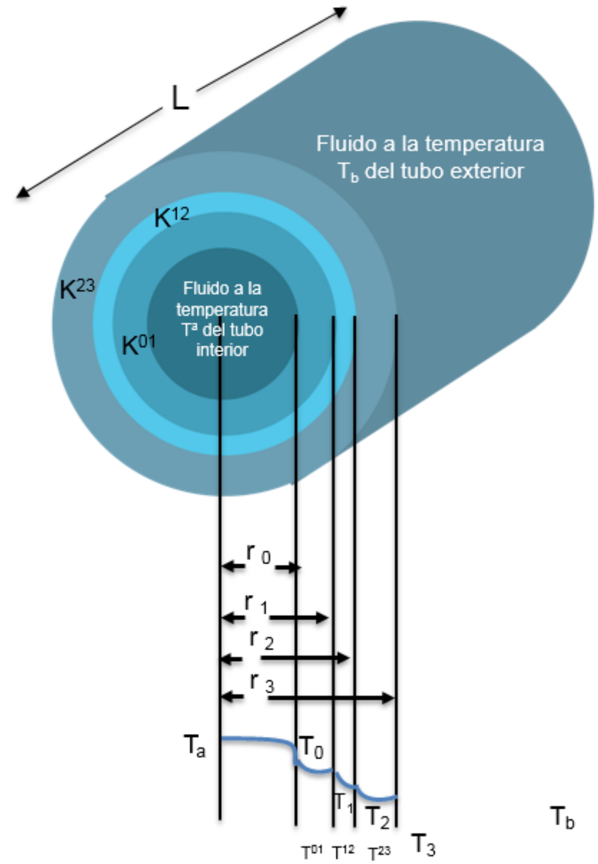
Con las condiciones del problema:

$$Q/L = 2\pi\,(T1 - T3) / 1/kt\,ln(r2/r1) + 1/kf\,ln(r3/r2)$$

Sustituyendo: $= 2\pi(400 - 90) / 1/30\ \ln 2.25/2\ + 1/0.032\ \ln 3.0/2.25$

$= 2\pi\ x\ 310/0.00393 + 8.9901$

$= 216.56$ Btu / hr- ft

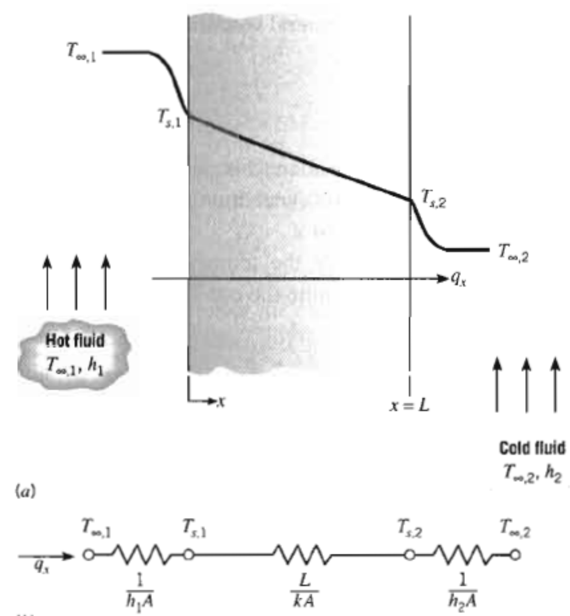


La analogía de la resistencia térmica con la eléctrica.

Para algunas aplicaciones conviene escribir la ley de Fourier como:

$$q_x = \frac{T_{s,1} - T_2}{(L_A/k_A A)}$$

El siguiente diagrama ilustra la analogía:



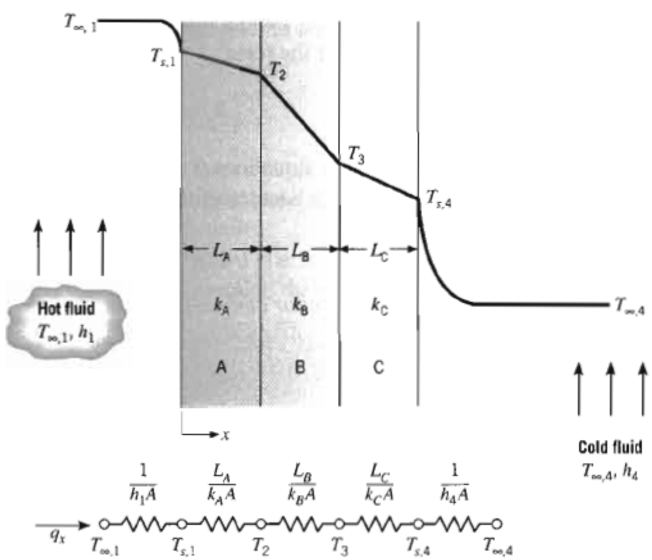
En ese caso el término **L_A/K_A A** es el análogo térmico de la resistencia eléctrica. Del mismo modo la ley de enfriamiento de Newton puede escribirse como:

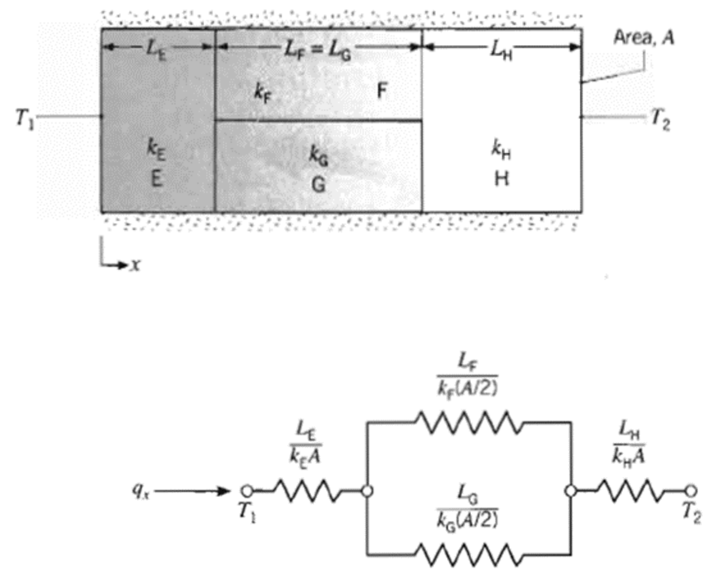
$$q_x = \frac{T_{\infty,1} - T_{s,1}}{(1/h_1 A)}$$

Y el término **$1/h_1$A** interpretarse como una resistencia térmica debida a la convección

Paredes compuestas.

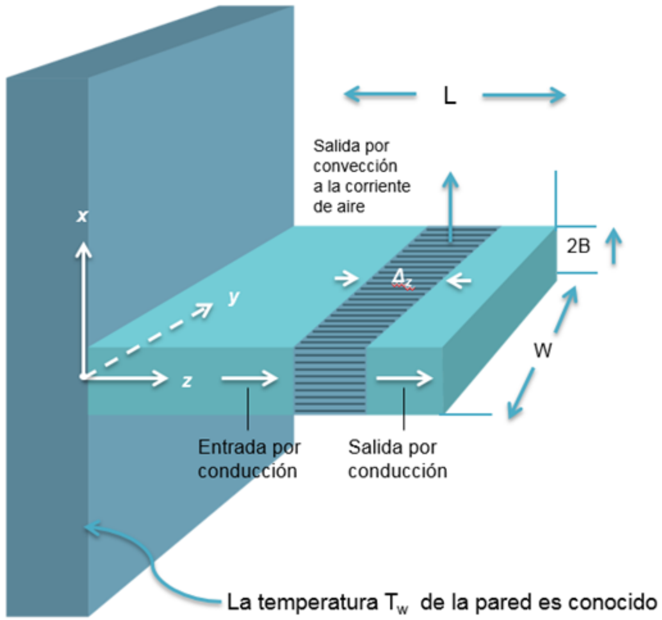
Esta analogía es útil para estudiar el caso de paredes compuestas:

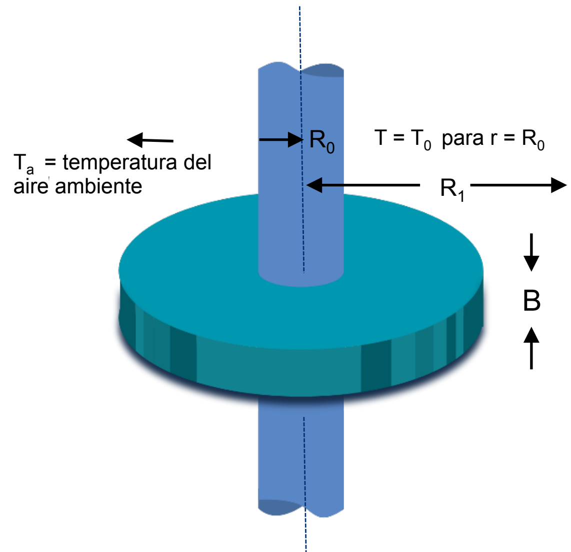




(a)

ALETAS





$$\frac{d^2 T}{dz^2} = \frac{h}{kB}(T - T_a)$$

$$\frac{d^2 \Theta}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d\Theta}{d\rho} + n^2 \Theta = 0$$

$$\Theta = \cosh N(1 - \zeta) / \cosh N$$

$$\theta/\theta b = I0(mr)K0(mr1) + K0(mr)I1($$

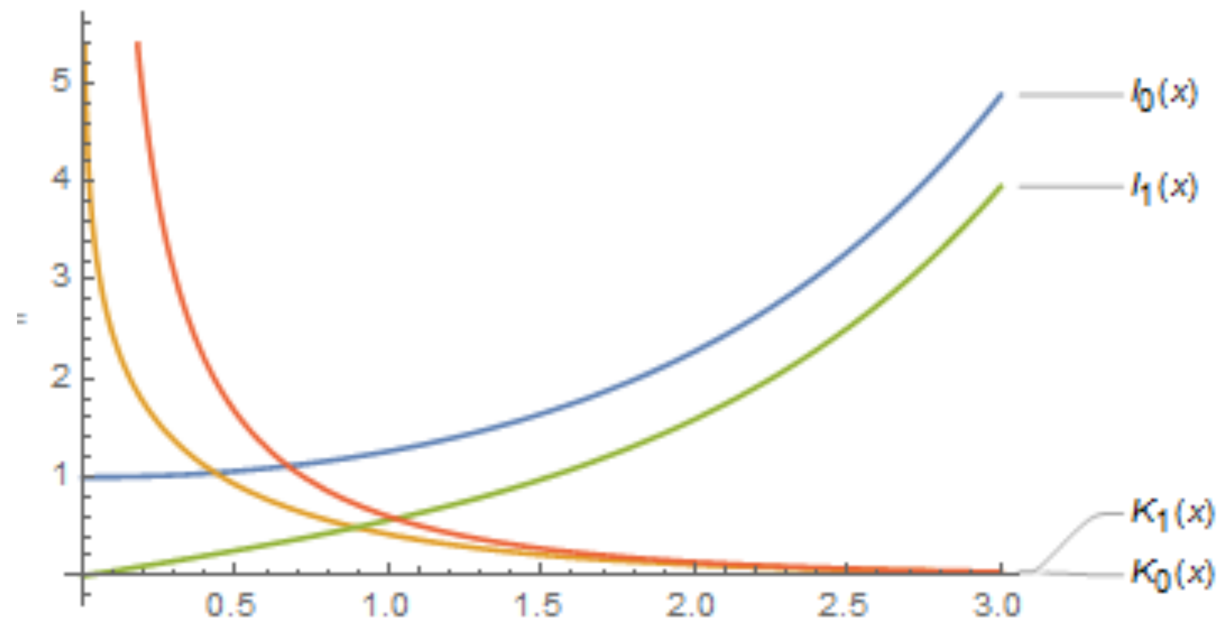
$$\theta = \frac{T - T_a}{T_w - T_a} \quad \zeta = z/L \quad N = \sqrt{hL^2/kB}$$

$$\Theta = T - T_a, \quad n^2 = 2h/kB \quad \text{y } r = \rho$$

Hoy pueden calcularse las soluciones con el uso de softwares como ***Mathematica*** y no es necesario recurrir a gráficas.

$I1(mr1) = d[I0\ (mr)]/d(mr)$ y $K1(mr) = -\ d[K0\ (mr)]/d(mr)$

Son las funciones de Bessel modificadas de primer orden de primera y segunda especie, respectivamente

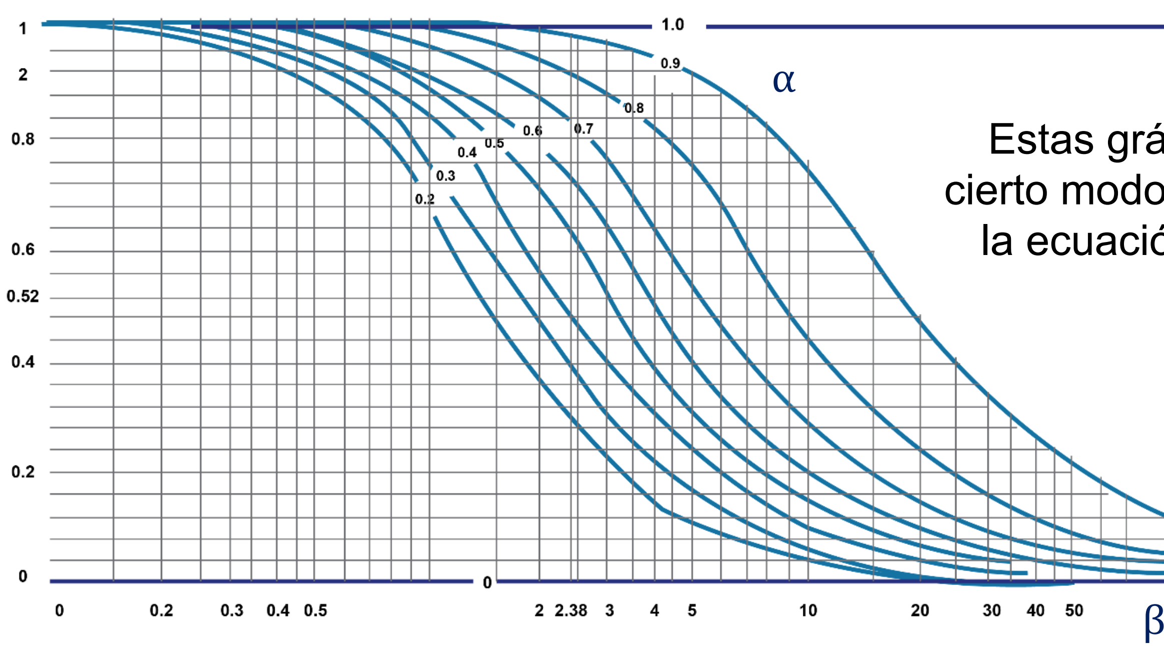


CÁLCULO DEL FLUJO

Existen gráficas de la eficiencia en función de los diferentes parámetros.

$\alpha = R0 / R1$ $\quad \beta = \sqrt{2}\ R12h/kB$ $\quad \Phi = T_0 - T_a$

$$Q = \pi\,(1 - \alpha^2)\ k\ B\ \Phi\ \beta^2\ G(\alpha, \beta)$$



Estas gráficas son en cierto modo soluciones de la ecuación diferencial

1. Balance

2. Ecuación diferencial para $\mathrm{q} + \mathrm{CI}$

3. Integración para q

4. Ecuación de Fourier

5. Integración para T

6. Perfil de temperaturas

7. Cálculo del flujo de calor en la superficie

PASOS PARA PLANTEAR PROBLEMAS DE CONDUCCIÓN DE CALOR CUANDO EXISTEN FUENTES AL INTERIOR DEL MATERIAL

EJEMPLOS DE SITUACIONES QUE CORRESPONDEN A GENERACIÓN INTERNA DE CALOR

- Efecto Joule

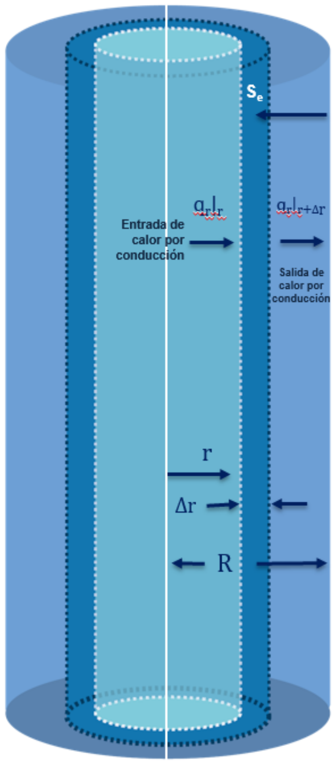
- Fricción viscosa de un
- fluido entre dos cilindros

- Reacción química

- Reacción nuclear

EFECTO JOULE

$$S_e = I^2/K_e$$

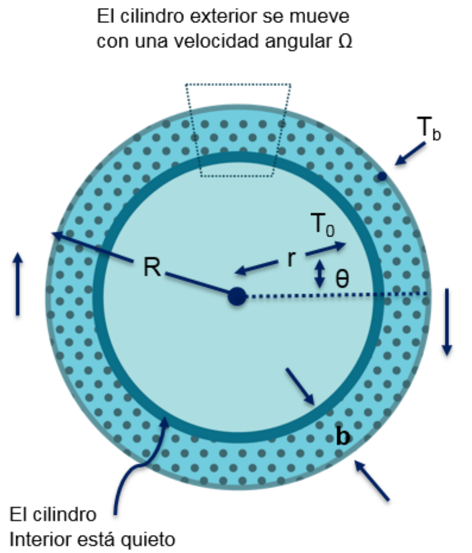


Producción uniforme de calor por disipación eléctrica S_e

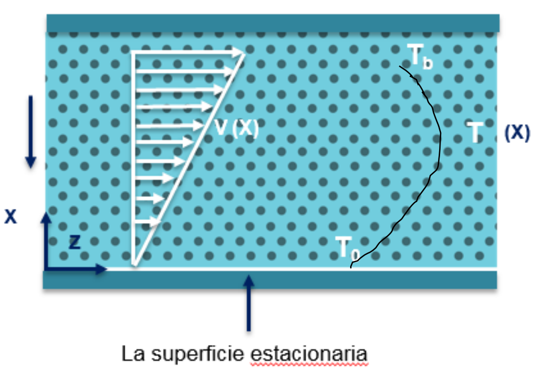
BALANCE	$(2\pi r L)(q_r\|_r) - (2\pi(r+\Delta r)L)(q_r\|_{r+\Delta r}) + (2\pi r \Delta r L) S_e = 0$
ECUACION DIFERENCIAL PARA q +CI	$\frac{d}{dr}(r q_r) = S_e r$
INTEGRACION PARA q	$q_r = S_e r/2$
ECUACION DE FOURIER (ZONA 2).	$-k\,dT/dr - S_e r/2$
INTEGRACIÓN PARA T	$T = S_e r^2/4k + C_2$ C_2 es igual a $T_0 + (S_e R^2/4k)$
PERFIL DE TEMPERATURAS	$T - T_0 = S_e R^2/4k\,[1-(r/R)^2]$

Viscosidad.

$$S_v = \mu\left(\frac{dv_z}{dx}\right)^2$$



La superficie superior se mueve con
Una velocidad V= R Ω



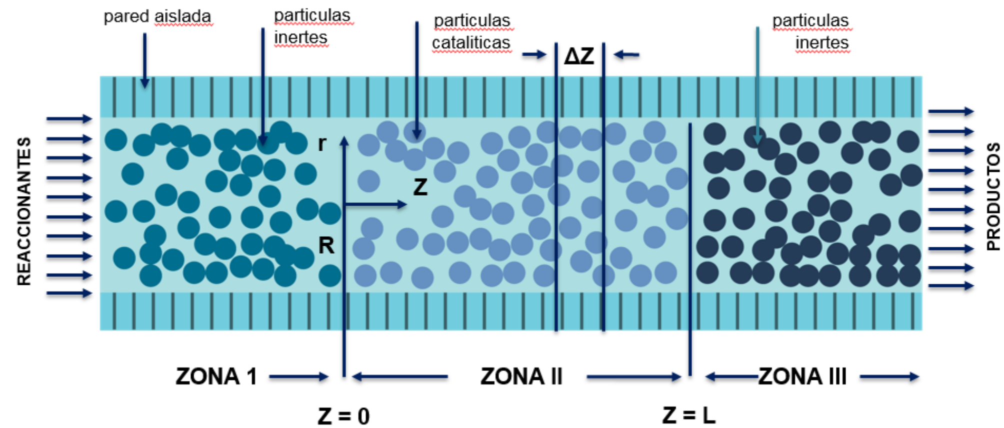
BALANCE	$WLq_x\|_x - WLq_x\|_{x+\Delta z} + WL\Delta_x\mu\,(V/b)^2 = 0$
ECUACION DIFERENCIAL PARA q +CI	$dq_{\infty}/dx = \mu(V/b)^2$
INTEGRACION PARA q	$q_x = \mu(V/b)^2\,x + C_1$
ECUACION DE FOURIER	$-k\,dT/dx = \mu(V/b)^2\,x + C_1$
INTEGRACIÓN PARA T	$T = -(\mu/k)(V/b)^2\,x^2/2 - C_1/k\,x + C_2$
PERFIL DE TEMPERATURAS	$\boldsymbol{(T-T_0)/(T_b-T_0) = (x/b) + 1/2\,Br(x/b)[1-(x/b)]}$

REACCIÓN QUÍMICA

$$S_e = S_{c1}(T-T/T1-T0\ )$$

Comentario:

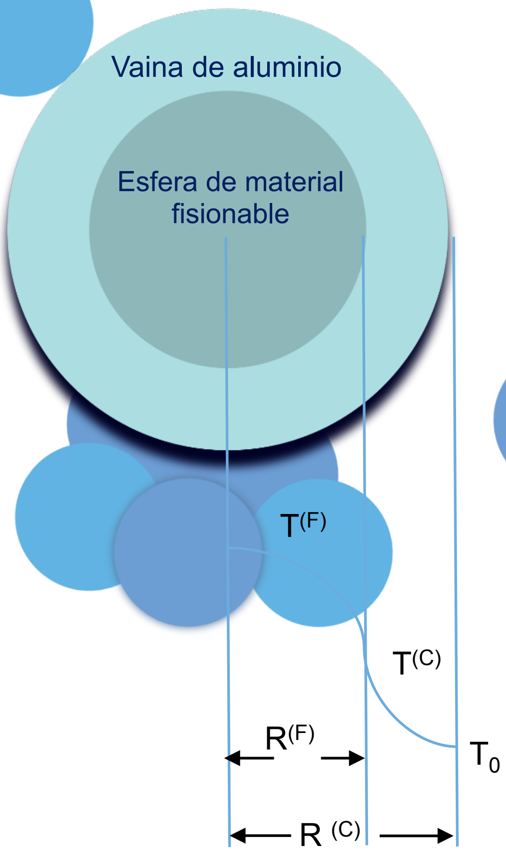
El perfil de temperaturas es una suma de exponenciales.
Las constantes de altura y crecimiento dependen de N y B Que son funciones de los materiales, de las condiciones de flujo y de la geometría.



BALANCE	$q\downarrow Z\ \|\downarrow Z+\Delta Z - q\downarrow Z\ \|\downarrow Z\ /\Delta z + \rho\downarrow 1\ v\downarrow 1\ C\downarrow v\ T\|\downarrow Z+\Delta Z - T\|\downarrow Z\ /\Delta z = S\downarrow e$
ECUACION DIFERENCIAL PARA Q +CI	$dq\downarrow z\ /dz + \rho\downarrow 1\ v\downarrow 1\ C\downarrow p\ dT/dz = S\downarrow e$
INTEGRACION PARA q	Hasta que se conozca T(Z)
ECUACION DE FOURIER (ZONA 2).	$-k\downarrow z,ef\ d\uparrow 2\ T/dz\uparrow 2\ + \rho\downarrow 1\ v\downarrow 1\ C$
INTEGRACIÓN PARA T	$\Theta = C_3 e^{m_a z} + C_4 e^{m_4 z}$ (para $m_3 \neq m_4$)
PERFIL DE TEMPERATURAS	$\Theta = (m4em4em3z - m3emaem4z/\ m■2@4\ em4 - m■2@3\ em3\ )$ (m_3+m_4)

REACCIÓN NUCLEAR

$$S_n = S_{n0}\,[1-b\,(r/R^{(F)})^2]$$



ECUACION DIFERENCIAL PARA q +CI	$\frac{d}{dr}\left(r^2 q_r^{(F)}\right) = S_{n0}\, r^2 \left[1+b\left(r/R^{(F)}\right)^2\right]$ $\frac{d}{dr}\left(r^2 q_r^{(C)}\right) = 0$
INTEGRACIÓN PARA q	$q_r^{(F)} = S_{n0}\left(\frac{r}{3} + \frac{b}{R^{(F)2}}\frac{r^3}{5}\right)$ $q_r^{(C)} = S_{n0}$
INTEGRACIÓN PARA T	$T^{(F)} = -\frac{S_{n0}}{k^{(F)}}\left(\frac{r^2}{6} - \frac{b}{R^{(F)2}}\frac{r^4}{20}\right) + C_2^{(F)}$ $T^{(C)} = +\frac{S_{n0}}{k^{(C)}} R^{(F)3}\left(\frac{1}{3} - \frac{b}{5}\right)\frac{1}{r} + C_2^{(C)}$
PERFIL DE TEMPERATURAS	$T^{(F)} - T_0 = -S_{n0}$