revista digital universitaria
revista.unam.mx

1 de noviembre de 2013 | Vol. 14 | Núm. 11 | ISSN 1607 - 6079

ARTÍCULO

ARS CONJECTANDI Y EL MÉTODO MONTE CARLO

Patricia Romero y Raúl Rueda

Dirección General de Cómputo y de Tecnologías de Información y Comunicación - UNAM
Departamento de Acervos Digitales

ARS CONJECTANDI Y EL MÉTODO MONTE CARLO

Resumen

Ars Conjectandi, la obra póstuma de Jacob Bernoulli, tiene 300 años de haber sido publicada, pero su impacto en diferentes disciplinas sigue siendo actual. En este trabajo tratamos de mostrar su importancia en el área de simulación usando el método Monte Carlo. Nuestra idea es ilustrar de manera sencilla en qué consiste este método y la importancia del trabajo de Bernoulli en su desarrollo.

Palabras clave: Ley de los grandes números, Monte Carlo, simulación

> "El Año Internacional de la Estadística se celebra en 2013 para conmemorar los 300 años de la edición de *Ars Conjectandi*, obra póstuma de Jacob Bernoulli…"

ARS CONJECTANDI *AND THE MONTE CARLO METHOD*

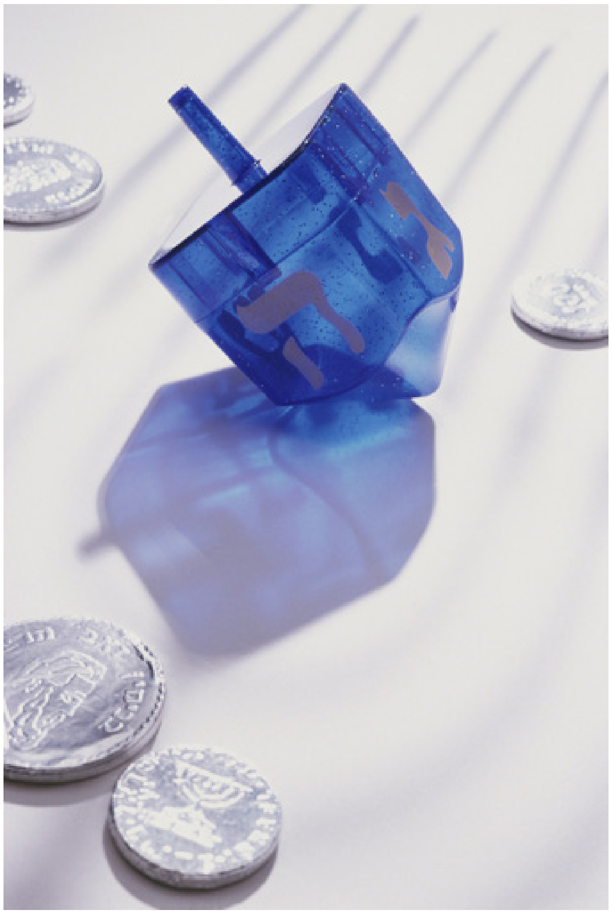
Abstract

Ars Conjectandi*, the posthumous work of Jacob Bernoulli was published 300 years ago, but still has a strong impact on a variety of areas. In this paper we set out to show its importance in the area of stochastic simulation and specifically in the Monte Carlo method. Our aim is to illustrate, in a simple way, what this method is about and highlight the importance of the work of Bernoulli in its development.*

Keywords: *Law of large numbers, Monte Carlo simulation* rdu revista digital universitaria

ARS CONJECTANDI Y EL MÉTODO MONTE CARLO

Introducción



El Año Internacional de la Estadística se celebra en 2013 para conmemorar los 300 años de la edición de *Ars Conjectandi*, obra póstuma de Jacob Bernoulli en la que, entre otras muchas cosas, demuestra el primer teorema límite en el desarrollo de la probabilidad: la ley débil de los grandes números, llamada así por Poisson (1837). Este resultado, esencialmente, dice que podemos aproximar la probabilidad de un evento tanto como queramos, usando la frecuencia relativa de la ocurrencia del mismo, en un número grande de ensayos. Este resultado sentó las bases de lo que hoy se conoce como *estadística frecuentista*, para distinguirla de otras teorías estadísticas igualmente importantes. En la época en que Bernoulli escribió su obra, los cálculos de probabilidades se reducían a los juegos de azar, en los que se suponía un número finito de resultados y todos con la misma probabilidad de ocurrir, de manera que las probabilidades de ciertas combinaciones podían calcularse *a priori*, esto es, sin necesidad de experimentar. Sin embargo, Bernoulli argumentaba que esto era una aplicación muy limitada de la teoría y la extendió a casos con distintas probabilidades, que eran calculadas *a posteriori*, mediante experimentación o bajo la consideración de resultados similares ocurridos en el pasado (Bernoulli, 1713).

El impacto del resultado de la obra de Bernoulli en la teoría moderna de la probabilidad ha sido estudiado por diferentes autores (Todhunter, 1865; Hald, 1990; Schneider, 2005; Shafer, 1996; Sylla, 2006, entre muchos otros), así como su importancia en la inferencia estadística desde la perspectiva frecuentista (ver por ejemplo, Denker, 2013). Pero no sólo ha sido importante en estas dos áreas, sino que es la base de un área que ha cobrado mucha relevancia debido al avance en la computación. La simulación estocástica es de vital importancia hoy en día, pues permite simular desde problemas sencillos hasta procesos complicados que hace unos años era impensable intentar resolver. La idea básica de la simulación es la misma que la de Bernoulli: hacer inferencia de los aspectos relevantes de un proceso, usando procedimientos aleatorios que pueden ser generados con las computadoras actuales y que resultan baratos, pues, por un lado, la capacidad y potencia del cómputo actual permite simular miles de procesos en poco tiempo, y por otro lado, no es necesario experimentar en todos los casos con los costos que esto representa. Estos procesos están basados en el método Monte Carlo y algunas extensiones de él.

En la siguiente sección daremos una breve reseña histórica del método Monte Carlo. En la tercera, hablaremos con un poco de detalle del resultado de Bernoulli. En la cuarta sección daremos un par de ejemplos para ilustrar el método Monte Carlo. Finalmente, en la última sección, hablaremos brevemente de algunas extensiones y daremos un panorama de las áreas en donde estos métodos se han usado exitosamente.

Algo de historia

Aunque el surgimiento y el nombre del método Monte Carlo nacieron con la aparición de las primeras computadoras electrónicas a mediados de los años 40 del siglo XX, la idea existe desde el siglo XIX. En 1873, A. Hall estimó el valor de π de manera experimental. En 1812, Laplace había dado una solución analítica al problema de la *aguja de Buffon*. Este problema fue propuesto en 1777 por Georges Louis Leclerc, conde de Buffon y consistía en estimar la probabilidad de que una aguja lanzada al azar a un tablero con dos rectas paralelas pintadas, intersectara una de las rectas. Lo interesante de la solución es que involucra al número π. Hall (1873) menciona que Laplace (1812) había encontrado una solución general que está dada por $2\,l\,/\,a\,\pi$, en donde a es la distancia entre las dos rectas paralelas y l la longitud de la aguja. Hall argumenta que si se estima esta probabilidad con m/n, con m el número de veces que la aguja intersecta alguna de las rectas en n ensayos, entonces se puede estimar a π con $2ml\,/\,an$. Hall menciona:

> En 1864 mi amigo, el capitán O.C. Fox, se encontraba desocupado, y le propuse que hiciera algunos experimentos para determinar el cociente m/n. Él construyó una tabla de madera con un par de rectas paralelas y lanzó al azar una aguja. Para evitar errores sistemáticos, en algunos de los experimentos la tabla era rotada ligeramente.

Sabemos que la aproximación al valor de π no era mala, pero lo que nunca se supo es si el capitán Fox recibió un pago por su trabajo.

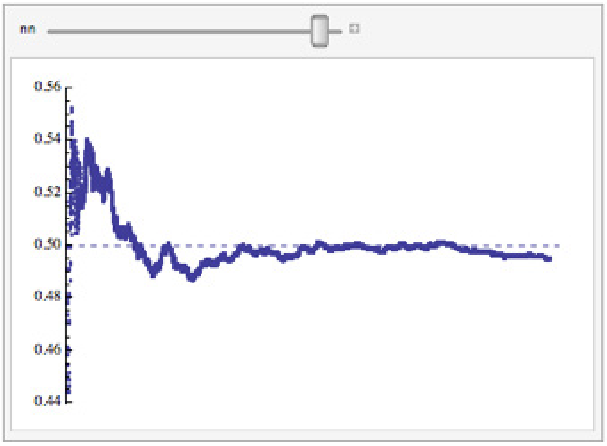
Como mencionamos al inicio, el uso extensivo del método Monte Carlo comenzó con el advenimiento de las computadoras electrónicas. En 1946, S. Ulam, que trabajaba en el Laboratorio Nacional de Los Álamos, situado en Nuevo México y establecido en 1943 para albergar al Proyecto Manhatan, se puso a jugar un juego de solitario llamado *canfield* mientras se recuperaba de una enfermedad. Como casi todos los juegos de solitario, terminarlo exitosamente depende más del azar que de la habilidad del jugador. Ulam se preguntó cuál sería la probabilidad de éxito, esto es, de resolver el juego. Ulam (1976) menciona: "… la idea de lo que después llamaríamos método Monte Carlo, se me ocurrió jugando solitario durante mi enfermedad … la idea se concretó cuando se lo propuse a Johnny [von Neumann] en 1946, durante una de nuestras conversaciones…". Ulam y von Neumann (1947) establecen que "… este procedimiento es análogo a jugar una serie de juegos de solitario en una computadora. Requiere, entre otras cosas, el uso de números aleatorios de una cierta distribución". En esas fechas se hizo la presentación de la primera computadora electrónica, ENIAC (*Electronic Numerical Integrator And Computer*), construida en 1943 en la Escuela de Ingeniería Eléctrica de la Universidad de Pensilvania bajo el mayor de los secretos. ENIAC fue diseñada para calcular trayectorias de artillería (ver Anderson, 1986). A John von Neumann se le ocurrió que estas ideas podrían usarse en la ENIAC para explorar los problemas de difusión de los neutrones al fisionarse en un sistema de reacciones en cadena y le mandó una carta a R. Richtmyer, en esa época el Jefe de la División Teórica del laboratorio. En esta carta le mencionaba que "la aproximación estadística puede implementarse adecuadamente con la computadora electrónica, para estudiar los problemas de difusión y multiplicación de neutrones en procesos de fisión". Adicionalmente, von Neumann describía en la carta la solución y al final añadió una hoja en donde escribió el código para implementarla. Puede decirse que esta es la primera descripción escrita de un problema a resolverse por el método Monte Carlo. El nombre, de acuerdo a Metropolis y Ulam (1949), fue dado por el mismo Metropolis, en alusión al entonces único o al menos, el más conocido Casino de Monte Carlo y la afición de Ulam a los juegos de solitario. De acuerdo a Segrè (1970), Enrico Fermi usó el método Monte Carlo en sus estudios sobre sistemas de neutrones 15 años antes, pero nunca publicó estos estudios.

Después de la guerra, el método Monte Carlo comenzó a ser muy importante en las investigaciones de los físicos, además de que en otras áreas se comenzaba a usar también. En 1952, Metropolis y co-autores, publican un artículo (ver Metropolis et al., 1953) en el que simulan un líquido en equilibrio en su fase gaseosa y proponen un algoritmo para generar números aleatorios de cualquier distribución. Este algoritmo es muy utilizado en el área de geofísica y es uno de los más importantes de los llamados métodos Monte Carlo vía cadenas de Markov. Estas técnicas son una extensión de los métodos *simples* de Monte Carlo, ya que en lugar de generar números aleatorios, simulan una cadena de Markov cuya distribución estacionaria es la distribución de la cual se quiere generar valores. El trabajo de Gelfand y Smith (1990) marcó el inicio del uso de los algoritmos de Monte Carlo vía cadenas de Markov en la comunidad estadística, en particular en el enfoque bayesiano. La explosión en su uso fue inmediata. Problemas cada vez más complejos podían ser resueltos con estos métodos. Las soluciones analíticas y exactas se fueron abandonando por su complejidad y las soluciones basadas en simulación, que siempre serán una aproximación, se volvieron el estándar en muchas áreas.

El método Monte Carlo

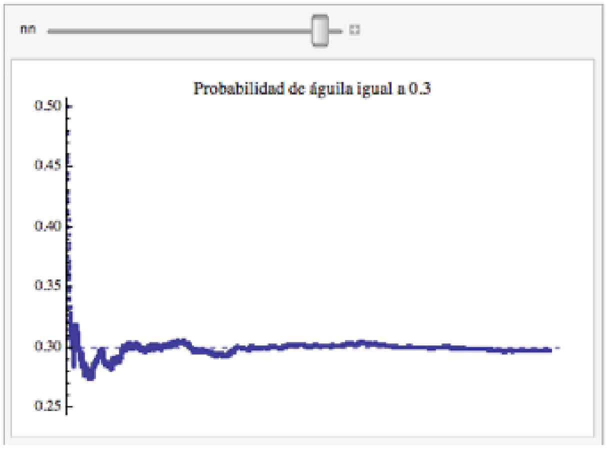
Como hemos mencionado, el método Monte Carlo es una aplicación importante del resultado de Bernoulli. ¿En qué consiste este resultado? En la época de Bernoulli, los únicos problemas de cálculo de probabilidad estaban relacionados con los juegos de azar. En estos juegos, el número de resultados posibles siempre es finito y todos ellos tienen la misma posibilidad de aparecer, ya sea por la simetría física del objeto usado o por la manera en la que se jugaba. De manera que para calcular la probabilidad de alguna combinación, como por ejemplo, dos seises al lanzar dos dados, o la obtención de dos pares en un juego de cartas, bastaba con enumerar todos los posibles resultados y contar aquellos que daban el resultado favorable. La probabilidad se calculaba entonces como el número de casos favorables entre el número de casos posibles. Estas probabilidades podían calcularse antes de que el juego tuviera lugar, e incluso, sin que éste se realizara.

Para Bernoulli, estas aplicaciones eran muy limitadas. Él quería extender el concepto de probabilidad para resolver problemas en otras áreas. Después de ejemplificar que no en todos los casos listar todas las posibilidades y asignarles la misma probabilidad era realista, y en algunos casos, era prácticamente imposible, propuso que las probabilidades podían estimarse *a posteriori* (a diferencia de los juegos de azar, que se calculaban *a priori*). Él decía que la probabilidad podía estimarse mediante la observación o considerando casos similares que hubiesen ocurrido en el pasado. La idea, pues, era estimar la probabilidad mediante frecuencias relativas. Lo importante no fue sólo la idea, sino que demostró que estas frecuencias podían estimar las probabilidades tan precisas como se quisiera, simplemente aumentando el número de observaciones. Lo que demostró fue una ley límite: “a medida que *n* -el número de observaciones- crece, la probabilidad de que la frecuencia relativa del evento de interés no diste en más de una cantidad pequeña del verdadero valor, es cada vez más grande”. Este resultado es llamado *la ley débil de los grandes números*.



Animación 1: Lanzamientos de una moneda honesta. Ver animación en: http://www.revista.unam.mx/vol.14/num11/art44

El clásico ejemplo del lanzamiento de una moneda servirá para ilustrar este resultado. Todo el mundo sabe que al lanzar una moneda al aire tenemos la misma oportunidad de obtener un águila que de obtener un sol. Esto es verdad en la gran mayoría de las monedas. En este caso, decimos que la probabilidad de obtener un águila es 1/2 (un caso favorable entre dos casos posibles) y lo mismo para el caso de obtener un sol. Esto se puede verificar empíricamente lanzando la moneda un número grande de veces, digamos 10,000, y contando el número de veces que apareció águila. Este cociente deberá ser muy cercano a 1/2. El resultado de Bernoulli asegura algo más. Supongamos que tenemos una moneda tal que la probabilidad de obtener un águila es distinta de 1/2 y que no sabemos cuál es. La manera de estimar esta probabilidad es, nuevamente, lanzando la moneda un número grande de veces y la frecuencia relativa de águilas nos dará un estimador de ella. A medida que el número de lanzamientos aumenta, digamos de 10,000 a 100,000, es más probable que la diferencia entre la frecuencia relativa y la verdadera probabilidad sea más pequeña. La siguiente animación ilustra este punto.



Animación 2. Lanzamientos de una moneda con probabilidad de águila igual a un tercio. Ver animación en: http://www.revista.unam.mx/vol.14/num11/art44

En esta animación se simulan 10,000 lanzamientos de una moneda honesta, aquella en la que la probabilidad de obtener águila es la misma que la de obtener sol y que por tanto, es igual a 0.5. Lo que se está graficando en la animación es la frecuencia relativa del número de águilas que aparecen entre el total de volados que se hacen. Al inicio, este valor está alejado del 0.5, pues hubo una racha de soles y eso hizo que la frecuencia sea menor al 0.5; sin embargo, a medida que el número de lanzamientos se incrementa, esta frecuencia va acercándose al 0.5. El resultado de Bernoulli dice que la frecuencia relativa puede alejarse del valor de 0.5, esto significa que tuvimos una racha grande de águilas (o soles), pero la probabilidad de que hagamos excursiones lejanas a 0.5, es cada vez más pequeña conforme el número de lanzamientos aumenta.

Lo interesante del resultado es que también existe la moneda deshonesta. Supongamos la siguiente situación: lanzamos un dado, si el lado de arriba muestra un uno o un cinco, diremos que salió águila; mientras que si aparece un dos, tres, cuatro o seis, diremos que aparece sol. En este caso, la probabilidad de águila es un tercio (dos casos favorables entre seis casos posibles) y la de sol es dos tercios. Podemos simular lanzamientos de esta moneda deshonesta y ver que también se cumple el resultado de Bernoulli.

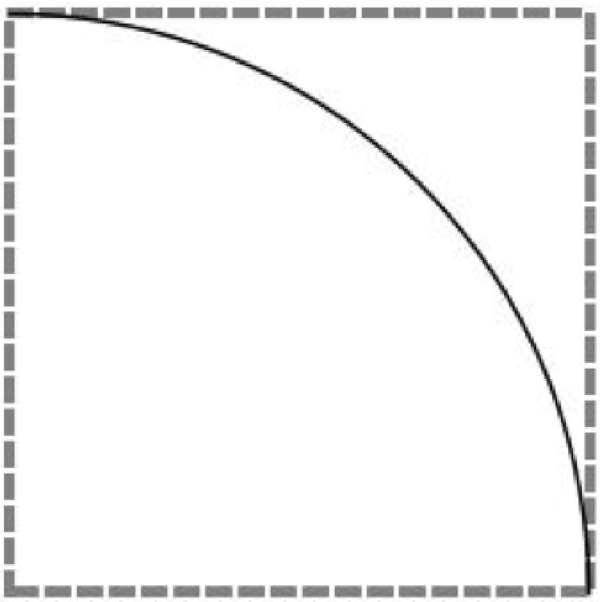
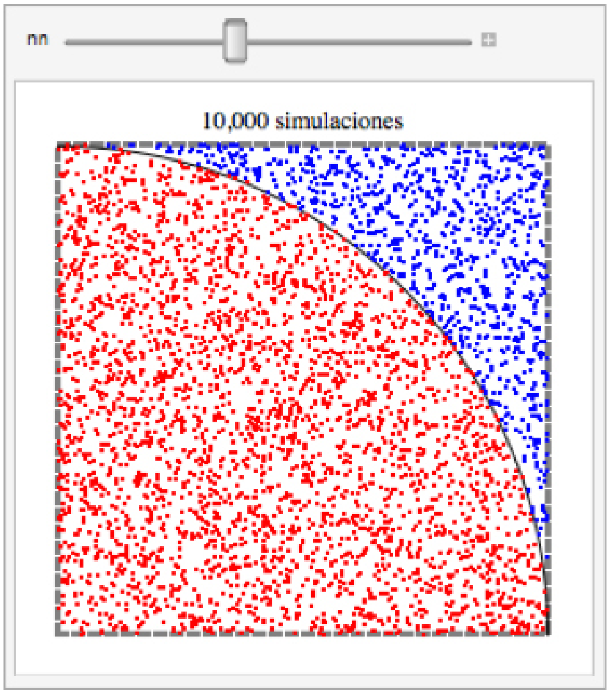


Figura 1: Cuadrado con el círculo inscrito.

Notemos que, al igual que en el caso anterior, a medida que el número de lanzamientos se incrementa, la frecuencia relativa de águilas se aproxima a un tercio. En ambos casos, lo que estamos haciendo es simular lanzamientos de una moneda con cierta probabilidad de obtener águila y estimamos esta probabilidad con la frecuencia relativa. Pero no sólo podemos estimar probabilidades, en principio, podemos estimar casi cualquier cosa. En la siguiente sección veremos dos ejemplos más.



Animación 3: π.
Ver animación en: http://www.revista.unam.mx/vol.14/num11/art44

Dos ejemplos

Desde la antigüedad griega, la constante π ha generado un club de admiradores muy grande. Recordemos que esta constante es la razón entre la longitud de cualquier circunferencia y su diámetro. Es una constante universal, no existe un sólo círculo cuya circunferencia y diámetro no estén relacionados con π. Recordemos que la manera de encontrar la longitud de una circunferencia es multiplicando el diámetro por la constante π. Si queremos encontrar el área contenida en la circunferencia, entonces debemos multiplicar π por el radio (la mitad del diámetro) al cuadrado. ¿Cuánto vale π? No se sabe el valor exacto de π. Sabemos que vale más de 3.1415 y menos de 3.1416. La expansión decimal es infinita, por lo que no puede calcularse. Sin embargo, ha habido muchos esfuerzos por calcular los primeros dígitos de esta expansión. El récord anda alrededor de ¡cinco trillones de dígitos! En la red existen muchas páginas sobre el por qué es interesante calcular estas expansiones decimales y cómo se hacen estos cálculos.

Haremos un pequeño ejercicio de simulación para intentar estimar aproximadamente el valor de π a dos o tres decimales. Supongamos que hay un cuadrado con lados igual a uno, por lo tanto, el área del cuadrado es uno. Inscribamos un cuarto de círculo en el cuadrado, centrado en el vértice inferior izquierdo (véase la figura 1). Este cuarto de círculo es parte de un círculo con radio uno. El círculo completo tiene área igual a π, por lo que el cuarto de círculo vale π/4. Vamos a estimar esta área.

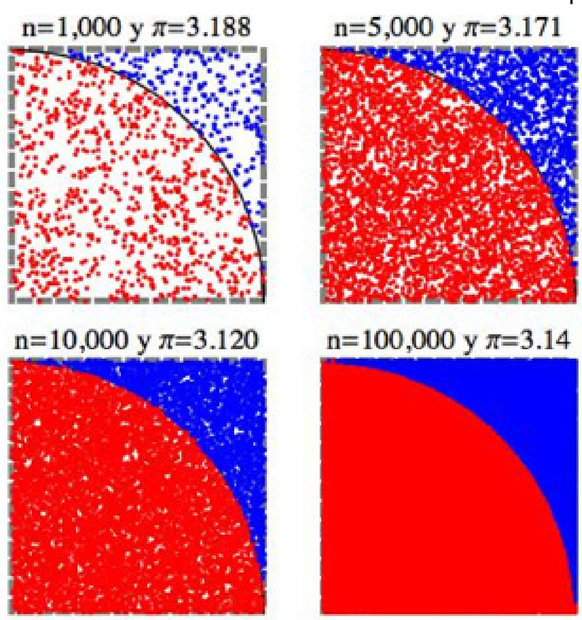


Figura 2:
Estimación de π.

Generaremos al azar puntos en el cuadrado. Como el área total es uno, la proporción de puntos que se localicen dentro del círculo nos dará una estimación de π/4, así que habrá que multiplicar esta proporción por cuatro para estimar π.

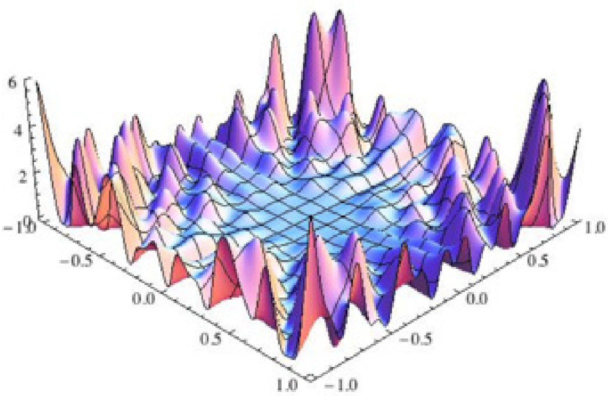


Figura 3: Superficie definida en el plano, con muchos "picos" y "valles"

En la figura 2 se muestran cuatro simulaciones y el valor aproximado de π que se obtiene con cada uno de ellas. Al igual que en el caso de la moneda, a medida que generamos más y más puntos mejorará nuestra estimación.

Por supuesto, nunca vamos a encontrar el verdadero valor de π, ni vamos a obtener más de tres o cuatro cifras de la expansión decimal, y eso con un gran esfuerzo computacional. La ventaja de los métodos Monte Carlo es que son muy sencillos de usar, pero en general sólo se aproximan a la solución y muy rara vez dan la solución exacta, suponiendo que exista. Sin embargo, son muy útiles para encontrar respuestas aproximadas a problemas que de otra manera no podríamos resolver, como ilustraremos en la siguiente sección.

El segundo ejemplo muestra una aplicación muy útil del método Monte Carlo, la obtención de áreas bajo una superficie. Supongamos que tenemos una función definida en el plano y cuya gráfica se muestra en la figura 3. Esta no es una superficie regular ya que tiene muchas zonas altas ("picos") y zonas bajas ("valles"), por lo que aproximar su área no es una tarea fácil; la mayoría de los métodos tradicionales fallan. Sin embargo, usando el método Monte Carlo es relativamente sencillo. Lo que se hizo fue generar 1,000,000 puntos aleatorios en el cuadrado [-1, 1] x [-1, 1], evaluar la función en cada uno de estos puntos, calcular la suma y dividirla por 1,000,000. El valor que resultó fue de 2.94382.

Extensiones

Las aplicaciones de la simulación Monte Carlo se han extendido, desde la década de los 70 del siglo XX, a diferentes áreas del conocimiento que van desde deportes hasta astronomía, pasando por medicina, finanzas y ecología, por mencionar unas cuantas. Algunos ejemplos de estas aplicaciones se listan a continuación.

En el área de medicina hay una gran variedad de temas tratados con el método Monte Carlo, por ejemplo, Hoffman, Metropolis y Gardiner (1955) estudian el problema de la aleatoriedad existente en el tiempo entre mitosis en poblaciones de células cancerosas. La simulación realizada se basa en dar una distribución de probabilidad a este tiempo entre mitosis y por medio de métodos Monte Carlo, empezando con una célula, simular el crecimiento del tumor. Barret (1969) estudia, a través de un modelo estocástico, los eventos asociados a la reproducción humana, modelando las probabilidades de concepción. O'Neill et al. (2000) analizan, utilizando métodos Monte Carlo vía Cadenas de Markov (MCMC), enfermedades infecciosas como la rubeola y la influenza. Bray y Wright (1998) obtienen tasas predictivas de prevalencia de nacimientos con síndrome de Down a partir de un meta análisis de los datos recolectados históricamente. Bray (2002) estudia los registros de incidencia y mortalidad por cáncer para estimar las tasas a corto plazo y la planificación de salud pública a largo plazo. Otros trabajos donde se utiliza el método Monte Carlo en Medicina se pueden ver en Liu et al. (1998), Thompson (1994), Hay, Leu y Rohrer (1987).

En zoología la simulación Monte Carlo también está presente, varios ejemplos de aplicaciones son: el artículo de Conroy, Fonnesbeck y Zimpfer (2005), en el que se modelan las tasas de cosecha del ave acuática usando MCMC. En el trabajo de Huffer y Wu (1998) modelan la distribución de especies de plantas en términos de variables climáticas como temperatura y lluvia, utilizando MCMC para estimar los parámetros de estos modelos. Sheehan (2000) aplica la técnica de MCMC al análisis genético de pedigríes complejos. Otros trabajos en el área de zoología son, por ejemplo, Link et al. (2002), Tan y Honyuang (1996) y Craig et al. (1997).

En ecología, ejemplos de algunas aplicaciones son: Gibson (1997), quien utiliza MCMC para ajustar modelos estocásticos espacio temporales en epidemiología de plantas. Galiano, Castro y Sterling (1987) aplican simulación Monte Carlo para estudiar el patrón espacial en vegetación. En finanzas, Scott (1985) estudia precios de acciones a través del modelo del valor presente, utilizando resultados Monte Carlo. Eraker (2001) aplica modelos de difusión a finanzas.

Conclusiones

El libro de Jacob Bernoulli revolucionó el estudio de la probabilidad y sentó las bases para el desarrollo frecuentista de la estadística. En este trabajo hemos intentado mostrar la importancia del resultado de Bernoulli en el área de simulación por Monte Carlo, pero sólo hemos podido dar una pequeña vista de su impacto en casi todas las áreas del conocimiento humano. *El Ars Conjectandi* merece ser *celebrado* con este Año Internacional de la Estadística.

Bibliografía

[1] ANDERSON, H.L. "Metropolis, Monte Carlo and the MANIAC". *Los Alamos Science*, 1986, vol. 16, p. 96–108.

[2] BARRETT, J.C. "A Monte Carlo Simulation of Human Reproduction". *Genus*, 1969, vol. 25, p. 1-22.

[3] BERNOULLI, J. *Ars Conjectandi.* Basel: Thurnisioum Fratrum, 1713.

[4] BRAY, I. y Wright, D.E. "Application of Markov chain Monte Carlo methods to modelling birth prevalence of Down syndrome". *Appl. Statist,* 1998, vol. 47, p. 589-602.

[5] BRAY, I. "Application of Markov chain Monte Carlo methods to projecting cancer incidence and mortality". *Appl. Statist*. 2002, vol. 51, p.151-164.

[6] CONROY, M.J., Fonnesbeck, C.J. y Zimpfer, N.L. "Modeling Regional Waterfowl Harvest Rates Using Markov Chain Monte Carlo". *Journal of Wildlife Management,* 2005, vol. 69, p. 77-90.

[7] CRAIG, B.A., Newton, M.A., Garrott, R.A., Reynolds, J.E. y Ross, W.J. "Analysis of Aerial Survey Data on Florida Manatee Using Markov Chain Monte Carlo". *Biometrics*, 1997, vol. 53, p. 524-541.

[8] DENKER, M. "Tercentennial anniversary of Bernoulli's law of large numbers". *Amer. Math. Soc.* 2013, vol. 50, p. 373 – 390.

[9] ERAKER, B. "MCMC Analysis of Diffusion Models with Application to Finance". *Journal of Business & Economic Statistics*, 2001, vol. 19, p. 177-191.

[10] GALIANO, E.F., Castro, I. y Sterling, A. "A Test for Spatial Pattern in Vegetation Using a Monte-Carlo Simulation". *Journal of Ecology*, 1987, vol. 75, p. 915-924.

[11] GELFAND, A.E. & Smith, A.F.M. "Sampling-based approaches to calculating marginal densities". *J. Amer. Statist. Assoc*. 1990, vol. 85, p. 398-409.

[12] GIBSON, G.J. "Markov Chain Monte Carlo Methods for Fitting Spatiotemporal Stochastic Models in Plant Epidemiology". *Appl. Statist.*, 1997, vol. 46, p. 215-233.

[13] HALD, A. *A history of mathematical statistics and their applications before 1750.* New York: Wiley, 1990.

[14] *HALL, A. "On an experimental determination of π". Messenger of Mathematics,*

1873, vol. 2, p. 113-114.

[15] HAY, J.W., Leu, R. y Rohrer, P. "Ordinary Least Squares and Sample Selection Models of Health-Care Demand". *Journal of Business & Economic Statistics*, 1987, vol. 5, p. 499-506.

[16] HOFFMAN, J.G., Metropolis, N. y Gardiner V. "Study of Tumor Cell Populations by Monte Carlo Methods". *Science*, 1955, vol. 122, p. 465-466.

[17] HUFFER, F.W. y Wu, H. "Markov Chain Monte Carlo for Autologistic Regression Models with Application to the Distribution of Plant Species". *Biometrics*, 1998, vol. 54, p. 509-524.

[18] HURD, C.C. "A note on early Monte Carlo computations and scientific meetings". *Ann. History Comp*. 1985, vol. 7, p. 141-155.

[19] LAPLACE, P.S. *Théorie analytique des probabilités.* Paris: Courcier, 1812.

[20] LINK, W.A., Cam, E., Nichols, J.D. y Cooch, E.G. "Of Bugs and Birds: Markov Chain Monte Carlo for Hierarchical Modeling in Wildlife Research". *Journal of Wildlife Management*, 2002, vol. 66, p. 277-291

[21] LIU, A.K., Belliveau, J.W. y Dale, A.M.. "Spatiotemporal Imaging of Human Brain Activity Using Functional MRI Constrained". *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 1998, vol. 95, p. 8945-8950.

[22] METROPOLIS, N., Rosenbluth, A.W., Rosenbluth, M.N., Teller, A.H. y Teller, A.W. "Equation of state calculations by fast computing machines". *J. Chem. Phys*. 1953, vol. 21, p. 1087-1092.

[23] METROPOLIS, N. y Ulam, S.M. "The Monte Carlo method". *J. Amer. Statist. Assoc.* 1949, vol. 44, p. 335-341.

[24] O'NEILL, P.D., Balding, D.J., Becker, N.G., Eerola, M. y Mollison D. "Analyses of infectious disease data from household outbreaks by Markov chain Monte Carlo methods". *Appl. Statist.* 2000, vol. 49, p. 517-542.

[25] POISSON, S.D. *Recherches sur la probabilité des judgaments.* Paris: Bachelier, 1837.

[26] SCHNEIDER, I. "Jakob Bernoulli, Ars Conjectandi (1713)", en: *Landmark writings in western mathematics 1640 – 1940.* I. Grattan – Guinness, R. Cooke, L. Corry, P. Crépel y N. GUICCIARDINI (editores). Amsterdam: Elsevier, 2005, p. 88-104.

[27] SCOTT, L.O. "The Present Value Model of Stock Prices: Regression Tests and Monte Carlo Results", *The Review of Economics and Statistics,* 1985, vol. 67, p. 599-605.

[28] SEGRÈ, E.G. *Enrico Fermi, Physicist*. Chicago: Univesity Press, 1970.

[29] SHAFER, G. "The significance of Jacob Bernoullis's Ars Conjectandi for the philosophy of probability theory today". *J. Econometrics*, 1996, vol. 75, p. 7-13.

[30] SHEEHAN, N.A. "On the Application of Markov Chain Monte Carlo Methods to Genetic Analyses on Complex Pedigrees". *International Statistical Review*, 2000, vol. 68, p. 83-110.

[31] SYLLA, E.D. *The art of conjecturing*. Baltimore, MD: The John Hopkins University Press (Traducción al inglés con anotaciones de la autora de Bernoulli, 1713), 2006.

[32] TAN, W.Y. y Honyuang, Z. J. "Monte Carlo Results for the 3-Poly Test for Animal Carcinogenicity Experiments". *Environmental Health Perspectives*, 1996, vol. 104, p. 872-877.

[33] THOMPSON, E.A. "Monte Carlo Likelihood in Genetic Mapping". *Statistical Science*, 1994, vol. 9, p. 355-366.

[34] TODHUNTER, I. *A history of the mathematical theory of probability from the time of Pascal to that of Laplace*. Cambridge: University Press, 1865.

[35] ULAM, S.M. *Adventures of a mathematician*. New York: Charles Scribner's Sons, 1976. Mencionado en Hurd (1985).

[36] ULAM, S.M. y von Neumann, J. "On the combination of stochastic and deterministic processes". *Bull. Amer. Math. Soc*. 1947, vol. 53, p. 11-403.