Revista Digital Universitaria
10 de diciembre 2008 • Volumen 9 Número 12 • ISSN: 1067-6079

ARTÍCULO

NO ES LO MISMO PERO ES IGUAL...

Dr. José Luis Cisneros Molina
Investigador Titular "A", Instituto de Matemáticas, Unidad Cuernavaca, UNAM.

© Coordinación de Publicaciones Digitales. DGSCA-UNAM
Se autoriza la reproducción total o parcial de este artículo, siempre y cuando se cite la fuente completa y su dirección electrónica.

10 de enero 2009 • Volumen10 Número 1 • ISSN: 1067-6079

No es lo mismo pero es igual…

Resumen

El concepto de relación de equivalencia es fundamental en matemáticas y aparece a lo largo de toda esta ciencia, desde sus bases hasta las teorías más modernas y abstractas. Sin embargo las relaciones de equivalencia también se encuentran en la vida diaria y mediante ellas se puede explicar cómo clasificamos distintos objetos o como "aprendemos" nuevos conceptos.

Palabras clave: Relaciones de equivalencia, clases de equivalencia, conjunto cociente.

It is not the same but it is equal…

Abstract

The concept of equivalence relation is fundamental in mathematics, it appears through this science from its basic concepts to the most modern and abstract theories. Moreover, equivalence relations are present in everyday life and by using them it can be explained how we classify things or how we "learn" new concepts.

Keywords: Equivalence relation, equivalence class, quotient set.

Introducción

"Hay 10 clases de personas en el mundo...
... las que entienden el sistema binario, y las que no."

Las Matemáticas se encuentran en todas partes y todos las utilizamos de una u otra manera diariamente. Se podría decir que son el lenguaje de las ciencias llamadas exactas y en la actualidad también son una herramienta muy útil en las Ciencias Sociales, tales como la Economía o la Psicología.

Explicar al público en general alguna teoría o aspecto de las Matemáticas modernas es una tarea difícil. Una de las razones es que no existe realmente una cultura general sobre conceptos Matemáticos modernos. Los conceptos que la mayoría de la gente estudió en la escuela fueron creados más allá de la mitad del siglo XIX. Esto ocurre en nuestro país con la ciencia en general, aunque el problema es mayor con las Matemáticas: si un físico o un biólogo habla sobre agujeros negros o ADN, la gente tiene una

© Coordinación de Publicaciones Digitales. DGSCA-UNAM
Se autoriza la reproducción total o parcial de este artículo, siempre y cuando se cite la fuente completa y su dirección electrónica.

idea sobre estos conceptos, tal vez una idea vaga y hasta posiblemente errónea, pero es muy probable que haya escuchado en alguna ocasión sobre ellos. Por otro lado, si un matemático habla sobre teoría K, gavillas o martingalas es muy probable que esa sea la primera vez que se escuchen dichas palabras.

En una ocasión leí sobre una anécdota que ocurrió cuando Einstein llegó a los Estados Unidos, la cual ignoro si es verídica, un reportero le preguntó si podía explicar en pocas palabras de que se trataba la Teoría de la Relatividad, la respuesta del famoso físico fue: "¿Podría Usted explicarme cómo hacer un pastel si yo no sé qué es la harina?". En ésto radica precisamente la dificultad para describir alguna teoría matemática moderna; se tiene que explicar primero muchos de los "ingredientes" antes de poder definir cómo hacer el "pastel". Los matemáticos tenemos la responsabilidad de que, poco a poco, dichos ingredientes formen parte de la cultura general.

En el presente artículo intentaré explicar uno de dichos ingredientes: las relaciones de equivalencia, las cuales son un tipo de relaciones muy fáciles de describir y aparecen a lo largo de todas las Matemáticas, desde sus bases, hasta las teorías más nuevas y abstractas. Este tipo de relaciones también se encuentra en otras ciencias e incluso en nuestra vida diaria.

Las relaciones de equivalencia son importantes en Matemáticas porque con ellas se pueden definir nuevos conceptos a partir de los existentes y clasificar los diferentes objetos de estudio. En la vida diaria también nos permiten explicar cómo clasificamos distintos objetos o cómo "aprendemos" conceptos nuevos.

Relaciones de equivalencia

Las relaciones de equivalencia son relaciones entre los elementos de un conjunto cualquiera y su característica principal es que **abstraen** el concepto de igualdad.

La importancia de estas relaciones consiste en que dividen a los elementos del conjunto en diferentes clases, llamadas clases de equivalencia, de tal suerte que cada elemento pertenece a una y sólo una clase.

Tomemos un conjunto cualquiera X y sean a y b dos elementos en X (lo cual denotamos por $a, b \in X$). Si a está relacionado con b escribiremos $a \sim b$. Una relación de equivalencia en X es una relación que satisface las siguientes propiedades:

Reflexividad: $a \sim a$ para toda a en X.

Simetría: Si $a \sim b$, entonces $b \sim a$.

Transitividad: Si $a \sim b$ y $b \sim c$, entonces $a \sim c$.

Es fácil ver que la igualdad entre elementos de cualquier conjunto satisface las propiedades anteriores. Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 1. Usemos como conjunto X una bolsa de lunetas[1] y como relación: a tiene el mismo color que b. Veamos que efectivamente es una relación de equivalencia:

1 Si eres muy joven para saber que son las lunetas, piensa en una bolsa de chocolates M&M's.

© Coordinación de Publicaciones Digitales. DGSCA-UNAM
Se autoriza la reproducción total o parcial de este artículo, siempre y cuando se cite la fuente completa y su dirección electrónica.

10 de enero 2009 • Volumen10 Número 1 • ISSN: 1067-6079

Reflexividad: toda luneta tiene el mismo color que sí misma.

Simetría: Si la luneta a tiene el mismo color que la luneta b, entonces la luneta b tiene el mismo color que la luneta a.

Transitividad: Si a tiene el mismo color que b y b el mismo color que c, entonces a tiene el mismo color que c.

Ejemplo 2. De manera análoga, es fácil ver que los siguientes ejemplos son relaciones de equivalencia:

a) Sea X el conjunto de todos los seres humanos y la relación: a tiene el mismo cumpleaños que b.

b) Sea $X = \{\text{todos los seres humanos}\}$ y la relación: a tiene el mismo signo del zodiaco que b.

Notemos que en los ejemplos anteriores estamos usando el mismo conjunto X y dos relaciones diferentes en él. Estas relaciones se pueden comparar, porque si dos personas tienen el mismo cumpleaños, entonces tienen el mismo signo del zodiaco, es decir, la relación en el ejemplo a) implica la relación en el ejemplo b), pero no al revés, pues hay personas que son Géminis pero que tienen cumpleaños distintos.

Para ver que no todas las relaciones son de equivalencia analicemos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3. Nuevamente $X = \{\text{todos los seres humanos}\}$ y la relación: a es hermano de b (de sangre por parte de padre y madre). Claramente esta relación es simétrica (si a es hermano de b, entonces b es hermano de a), pero no es reflexiva (nadie es hermano de sí mismo) y tampoco es transitiva (ya que si a es hermano de b, entonces b es hermano de a, pero como vimos a no es hermano de a). Sin embargo, esta relación es casi transitiva, es decir, si a es hermano de b, b es hermano de c y $a \neq c$, entonces a es hermano de c. Si en la relación consideramos también a los medios hermanos, entonces la transitividad puede fallar en más casos.

Clases de equivalencia

Veamos ahora cómo una relación de equivalencia divide al conjunto en el que está definida. Sea X un conjunto con una relación de equivalencia $\sim$. Tomemos un elemento a de nuestro conjunto X, es decir $a \in X$. La clase de equivalencia de a, la cual denotaremos por $[a]$, es el subconjunto de X formado por todos los elementos b de X que están relacionados con a, es decir $b \sim a$. En símbolos, esto se escribe así:

$$[a] = \{\, b \in X \mid b \sim a \,\}.$$

De todo elemento en $[a]$ (por ejemplo a) decimos que es un representante de la clase $[a]$. Veamos algunos ejemplos:

- En el Ejemplo 1, la clase de equivalencia de una luneta roja es el montoncito con todas las lunetas rojas.
- En el Ejemplo 2a) de los cumpleaños, la clase de equivalencia de Albert Einstein está formada por todas las personas que cumplen años el 14 de marzo.
- En el Ejemplo 2b) de los signos del zodiaco, mi clase de equivalencia está formada por todas las

© Coordinación de Publicaciones Digitales. DGSCA-UNAM
Se autoriza la reproducción total o parcial de este artículo, siempre y cuando se cite la fuente completa y su dirección electrónica.

personas que son Aries.

No es difícil convencerse de que dadas cualesquiera dos clases de equivalencia tenemos sólo dos posibilidades, o son la misma, o son *ajenas*, es decir, **no** tienen elementos en común. Veamos esto en nuestros ejemplos.

- En el Ejemplo 1, tomemos dos lunetas, si son del mismo color (digamos rojas) entonces sus respectivas clases de equivalencia son la misma (el montoncito con todas las lunetas rojas). Si son de distinto color (roja y azul, por ejemplo), entonces sus clases de equivalencia (el montoncito rojo y el montoncito azul) no tienen elementos en común (no hay lunetas que sean rojas y azules al mismo tiempo).
- Análogamente, en el Ejemplo 2a) dos personas que cumplan años el mismo día tienen la misma clase de equivalencia y , por ejemplo, las clases de equivalencia de Benito Juárez y Albert Einstein no tienen elementos en común, pues no existe ninguna persona que cumpla años el 21 de marzo y al mismo tiempo el 14 de marzo.

Entonces tenemos que las clases de equivalencia **parten** al conjunto X, donde cada clase de equivalencia es una parte. En este caso, los matemáticos decimos que toda relación de equivalencia **induce** una partición en el conjunto X. Por lo tanto, las clases de equivalencia **clasifican** a los elementos de X, poniendo a cada elemento en su correspondiente clase de equivalencia.

Una de las propiedades más importantes de las clases de equivalencia aparece cuando formamos un nuevo conjunto cuyos elementos son **las clases de equivalencia**, es decir, olvidamos que cada clase de equivalencia puede estar formada por muchos elementos de X y la pensamos como un solo elemento de un nuevo conjunto al que llamaremos $\tilde{X}$. En símbolos esto lo escribimos así:

$$\tilde{X} = \{ [a] \,|\, a \in X \},$$

(el conjunto $\tilde{X}$ está formado por todas las clases de equivalencia $[a]$, donde a es un elemento de X). El conjunto $\tilde{X}$ recibe el curioso nombre de *conjunto cociente*. La propiedad importante es que si "vemos fijamente" al conjunto $\tilde{X}$, entonces cada uno de sus elementos (es decir, cada clase de equivalencia) representa la **propiedad** que tienen en común los elementos de X en dicha clase de equivalencia y **todo** el conjunto $\tilde{X}$ representa **un nuevo concepto**. Como antes, esto se entiende mejor con un ejemplo.

Consideremos nuevamente el Ejemplo 1 donde X es una bolsa de lunetas. En este caso, el conjunto $\tilde{X}$ tiene como elementos a los montoncitos de distintos colores. En este caso, cada elemento de $\tilde{X}$ representa un **color,** que es la propiedad que tienen en común las lunetas que están en dicha clase de equivalencia (montoncito). Por otro lado todo el conjunto $\tilde{X}$ representa los distintos colores que tienen las lunetas: rojo, amarillo, café, verde, azul, naranja y morado[2].

2 ¿Hay lunetas moradas?

© Coordinación de Publicaciones Digitales. DGSCA-UNAM
Se autoriza la reproducción total o parcial de este artículo, siempre y cuando se cite la fuente completa y su dirección electrónica.

10 de enero 2009 • Volumen10 Número 1 • ISSN: 1067-6079

En otras palabras, $\tilde{X}$ **abstrae** el concepto con el que la relación de equivalencia **clasifica** a los elementos de X. En este caso, el color.

De la misma manera, en el Ejemplo 2a), la propiedad que representa cada clase de equivalencia es un día de cumpleaños y $\tilde{X}$ representa, o consiste de todos los **días del año**. En el Ejemplo 2b), mi clase de equivalencia representa al signo **Aries** y $\tilde{X}$ a todos los **signos del zodiaco.**

Ejemplos de relaciones de equivalencia en matemáticas

En todos nuestros ejemplos, desde la misma definición de la relación de equivalencia podemos ver cuál es el concepto que clasifica a los elementos de X, pero en general **no** es así, como veremos a continuación.

Veamos algunos ejemplos de relaciones de equivalencia en matemáticas.

Ejemplo 4. Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los *números naturales*:

$$\mathbb{N} = \{\, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, \ldots \,\}$$

y consideremos el conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, que consiste de todas las parejas ordenadas de números naturales

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{\, (a, b) \mid a, b \in \mathbb{N} \,\},$$

donde ordenadas quiere decir que $(2, 4)$ **no** es igual a $(4, 2)$.

Sea X el subconjunto de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ de parejas cuyo segundo número es **distinto** de cero, es decir

$$X = \{\, (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid b \neq 0 \,\}.$$

Definamos la siguiente relación de equivalencia en X:

$$(a, b) \sim (c, d) \quad \text{si y sólo si} \quad ad = bc.$$

A primera vista, no es fácil reconocer cual es la propiedad que tienen en común los elementos de una clase de equivalencia (aparte de satisfacer la igualdad anterior). Analicemos por ejemplo la clase de equivalencia de la pareja $(1, 2)$:

$$[(1, 2)] = \{\, (1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8), (5, 10), (6, 12), (7, 14), (8, 16), \ldots \,\}.$$

En este caso, podemos observar que el primer número de la pareja **siempre** es la mitad del segundo número, por lo que podríamos decir que la propiedad que representa esta clase de equivalencia es la de mitad. Otra manera de ver esto es identificando a cada pareja ordenada (a, b) con la fracción $\frac{a}{b}$, entonces podemos ver que todos los elementos de la clase $[(1, 2)]$ representan a la **misma fracción**:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \frac{6}{12} = \frac{7}{14} = \frac{8}{16} = \cdots$$

Por lo tanto, podemos decir que la clase de equivalencia $[(1, 2)]$ **es** la fracción $\frac{1}{2}$ y los distintos representantes

© Coordinación de Publicaciones Digitales. DGSCA-UNAM
Se autoriza la reproducción total o parcial de este artículo, siempre y cuando se cite la fuente completa y su dirección electrónica.

de la clase, son distintos representantes de la misma fracción.

Ahora, si cada clase de equivalencia $[(a,b)]$ la estamos identificando con la fracción $\frac{a}{b}$, entonces el conjunto cociente $\tilde{X}$ consiste de todas las fracciones $\frac{a}{b}$ con a y b números naturales y $b \neq 0$. El nuevo concepto con el que la relación de equivalencia $\sim$ clasifica a los elementos de X es el concepto de **razón entre dos números naturales.**

El hecho de que cada fracción tenga muchos representantes distintos es una de las causas de que muchos niños en la primaria tengan problemas para sumar fracciones.

Ejemplo 5. Consideremos nuevamente el conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{\, (a,b) \mid a, b \in \mathbb{N} \,\}$, de parejas ordenadas de números naturales y definamos la siguiente relación de equivalencia en él:

$$(a,b) \sim (c,d) \quad \text{si y sólo si} \quad a + d = b + c.$$

Analicemos la clase de equivalencia de las parejas $(2,0)$, $(7,7)$, $(1,2)$:

$$\begin{aligned}
[(2,0)] &= \{(2,0),(3,1),(4,2),(5,3),(6,4),(7,5),(8,6),(9,7),\ldots\},\\
[(7,7)] &= \{(0,0),(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(7,7),\ldots\},\\
[(1,2)] &= \{(0,1),(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,6),(6,7),(7,8),\ldots\}.
\end{aligned}$$

Podemos observar que en los elementos de la clase $[(2,0)]$ el primer número de la pareja **siempre** es 2 unidades mayor que el segundo número, en los elementos de la clase $[(7,7)]$ ambos números **siempre** son iguales y en los elementos de la clase $[(1,2)]$ el primer número de la pareja **siempre** es 1 unidad menor que el segundo número. De manera general, tenemos que en todos los elementos en una clase, la diferencia entre el primer y segundo números es **la misma:**

$$\begin{aligned}
&2-0=3-1=4-2=5-3=6-4=7-5=8-6=9-7=\cdots\\
&0-0=1-1=2-2=3-3=4-4=5-5=6-6=7-7=\cdots\\
&0-1=1-2=2-3=3-4=4-5=5-6=6-7=7-8=\cdots
\end{aligned}$$

Entonces a cada clase de equivalencia la podemos identificar con dicha diferencia, es decir, a la clase $[(2,0)]$ con el número 2, la clase $[(7,7)]$ con el número 0 y a la clase $[(1,2)]$ con el número -1. En general, dada una pareja ordenada cualquiera de números naturales, tenemos tres posibilidades:

- El primer número es **mayor** que el segundo. Si $k, n \in \mathbb{N}$ y $n > 0$, la clase $[(k+n,k)]$ es identificada con el número positivo $k+n-k=n$.

- El primer número es **igual** que el segundo. Si $k \in \mathbb{N}$, la clase $[(k,k)]$ es identificada con el número $k-k=0$.

- El primer número es **menor** que el segundo. Si $k, n \in \mathbb{N}$ y $n > 0$, la clase $[(k,k+n)]$ es identificada con el número negativo $k-(k+n)=-n$.

Por lo tanto, el conjunto cociente $\widetilde{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ se identifica con el conjunto de los números enteros, el cual se acostumbra denotar por la letra $\mathbb{Z}$, es decir,

$$\mathbb{Z} = \{\ldots,-9,-8,-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,\ldots\}.$$

© Coordinación de Publicaciones Digitales. DGSCA-UNAM
Se autoriza la reproducción total o parcial de este artículo, siempre y cuando se cite la fuente completa y su dirección electrónica.

10 de enero 2009 • Volumen10 Número 1 • ISSN: 1067-6079

El nuevo concepto con el que la relación de equivalencia $\sim$ clasifica a los elementos de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ es el concepto de diferencia **entre dos números naturales**.

Ejemplo 6. Sea $X = \{\,(a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\mid b\neq 0\,\}$ con la misma relación de equivalencia que el Ejemplo 4, es decir,

$$(a,b)\sim(c,d) \quad \text{si y sólo si} \quad ad=bc.$$

Nuevamente la clase de equivalencia $[(a,b)]$ puede identificarse con la fracción $\frac{a}{b}$, pero ahora las fracciones pueden ser **negativas**. En este caso, el conjunto cociente $\tilde{X}$ se identifica con el conjunto de los números racionales, el cual se acostumbra denotar por la letra $\mathbb{Q}$, es decir,

$$\mathbb{Q}=\{\,\frac{a}{b}\mid a,b\in\mathbb{Z},\ b\neq 0\,\}.$$

Ejemplo 7. Sea n un número entero. Definimos una relación de equivalencia en el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ de la siguiente manera

$$a\sim b \quad \text{si y sólo si} \quad a-b \text{ es un múltiplo de } n.$$

Esta relación se conoce como congruencia módulo n y generalmente cuando $a\sim b$ se denota por $a\equiv b \mod n$.

Tomemos como ejemplo $n=5$ y analicemos la clase de equivalencia de 1:

$$[1]=\{\dots,-34,-29,-24,-19,-14,-9,-4,1,6,11,16,21,26,31,36,\dots\}.$$

Después de observar los números en esta clase de equivalencia no es difícil llegar a la conclusión de que consta de todos los números de la forma $5k+1$, donde k puede ser cualquier número entero. En otras palabras, la clase de equivalencia $[1]$ consiste de **todos los números que al dividirlos entre 5, nos queda como residuo 1.** De lo anterior podríamos pensar que

> *Una clase de equivalencia consiste de todos los números que al dividirlos entre n tienen el* **mismo residuo.**

Como en los ejemplos anteriores, podríamos verificar esto para otras clases de equivalencia, sin embargo, en matemáticas **no** es suficiente verificar algunos o muchos casos para llegar a una conclusión, lo que hacemos los matemáticos es **demostrar** que las afirmaciones son válidas en general. Como un ejemplo, daremos una demostración de la conjetura[3] anterior.

Demostración. Sea b un número entero **cualquiera** y supongamos que al dividir a b entre n obtenemos como residuo r, es decir

$$b=kn+r \quad \text{para alguna } k\in\mathbb{Z} \text{ y } 0\le r<n. \tag{1}$$

Lo que queremos **demostrar** es que **todo** elemento a en la clase $[b]$, al dividirlo entre n también obtenemos como residuo r.

3 Juicio que se forma de las cosas o acaecimientos por indicios y observaciones. Real Academia Española.

© Coordinación de Publicaciones Digitales. DGSCA-UNAM
Se autoriza la reproducción total o parcial de este artículo, siempre y cuando se cite la fuente completa y su dirección electrónica.

Como a está en $[b]$ tenemos que $a \equiv b \mod n$, por lo tanto, $a - b$ es un múltiplo de n, es decir,

$$a - b = ln \quad \text{para alguna } l \in \mathbb{Z}\,, \tag{2}$$

substituyendo (1) en (2) obtenemos

$$\begin{aligned} a - (kn + r) &= ln \\ a &= ln + kn + r \\ a &= (l + k)n + r \end{aligned}$$

por lo tanto al dividir a a entre n también obtenemos como residuo a r. □[4]

Por lo tanto, el conjunto cociente $\tilde{\mathbb{Z}}$ de esta relación, que generalmente se denota por $\mathbb{Z}_n$, consiste en las n clases correspondientes a cada posible residuo r entre 0 y $n - 1$

$$\mathbb{Z}_n = \{[0], [1], [2], \ldots, [n-1]\}$$

y es llamado el conjunto de clases residuales módulo n.

En el caso cuando $n = 2$, tenemos que $\mathbb{Z}_2$ consta de sólo dos clases $\mathbb{Z}_2 = \{[0], [1]\}$, la clase $[0]$ corresponde a los **números pares** y la clase $[1]$ corresponde a los **números impares**.

En los ejemplos anteriores hemos visto que el conjunto de números enteros $\mathbb{Z}$ y el conjunto de números racionales $\mathbb{Q}$ pueden verse como el conjunto cociente de una relación de equivalencia. El conjunto de números naturales también puede verse como un conjunto cociente.

Ejemplo 8. Consideremos a todos los *conjuntos finitos* y digamos que dos conjuntos están relacionados si podemos encontrar una **biyección** entre ellos, es decir, si a **todo** elemento del primer conjunto podemos asociarle **uno y sólo un** elemento del segundo conjunto y **viceversa**, por ejemplo

$\{\spadesuit, \heartsuit, \clubsuit\}$ está relacionado con {☕, ⚽, 🚲}

ya que podemos encontrar una[5] *biyección* entre ellos, por ejemplo:

$$\begin{aligned} \spadesuit &\rightleftharpoons \text{☕} \\ \heartsuit &\rightleftharpoons \text{⚽} \\ \clubsuit &\rightleftharpoons \text{🚲} \end{aligned} \tag{3}$$

Sin embargo

$\{\spadesuit, \heartsuit, \clubsuit\}$ **no** está relacionado con {○, ♂, ⚥, ♀}

ya que si intentamos encontrar una *biyección*, siempre saldrá sobrando un elemento del segundo conjunto,

4 Anteriormente se acostumbraba terminar una demostración con las letras QED, abreviación de la frase en latín *quod erat demonstrandum* que significa ``lo que se quería demostrar''. Actualmente se usa el símbolo □ llamado *lápida* (tombstone en inglés) o *símbolo de Halmos*, en honor al matemático Paul Halmos quien introdujo su uso en las matemáticas.

5 De hecho podemos encontrar $3! := 3 \times 2 \times 1 = 6$ biyecciones distintas.

© Coordinación de Publicaciones Digitales. DGSCA-UNAM
Se autoriza la reproducción total o parcial de este artículo, siempre y cuando se cite la fuente completa y su dirección electrónica.

10 de enero 2009 • Volumen10 Número 1 • ISSN: 1067-6079

por ejemplo:

$$\begin{aligned} \spadesuit &\rightleftharpoons \circ \\ &\leftharpoondown \text{♂} \\ \heartsuit &\rightleftharpoons \text{⚥} \\ \clubsuit &\rightleftharpoons \text{♀} \end{aligned} \tag{4}$$

Esta relación es una relación de *equivalencia* y cada clase de *equivalencia* consiste de todos los conjuntos con el mismo número de elementos. Por lo tanto, cada clase de equivalencia puede identificarse con un número natural, es decir

El número n es la clase de equivalencia de todos los conjuntos que tienen n elementos.

Así el conjunto cociente se identifica con el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$. Para una explicación más extensa del concepto de número sugiero leer el texto clásico de Bertrand Rusell

Relaciones de equivalencia en matemáticas

En matemáticas se estudian muchos tipos de objetos, como por ejemplo, *conjuntos, grupos, espacios topológicos,* por mencionar sólo algunos. Para estudiarlos, se dividen en distintas *categorías*, las cuales consisten de dos ingredientes: los **objetos** mismos y de unas cosas llamadas **morfismos** que sirven para relacionar o comparar a los *distintos objetos.*

Ejemplo 9. Consideremos la categoría de conjuntos, en la cual los objetos son obviamente los *conjuntos* y los *morfismos* son l*as funciones entre dos conjuntos,* las cuales asocian a todo elemento del primer conjunto **uno y sólo un** elemento del segundo conjunto. Si X y Y son dos conjuntos, una *función* f del conjunto X en el conjunto Y se denota por $f\colon X \to Y$ y si $a \in X$, entonces $f(a)$ denota al elemento de Y asociado a a mediante la *función* f.

Si en (3) consideramos la asignación dada por las flechas que van de izquierda a derecha $\rightharpoonup$ tenemos una *función* del conjunto $\{\spadesuit, \heartsuit, \clubsuit\}$ en el conjunto {☕, ⚽, 🚲}, con las flechas de derecha a izquierda $\leftharpoondown$ tenemos una *función* del conjunto {☕, ⚽, 🚲} en el conjunto $\{\spadesuit, \heartsuit, \clubsuit\}$. En (4) las flechas $\rightharpoonup$ definen una *función* del conjunto $\{\spadesuit, \heartsuit, \clubsuit\}$ en el conjunto {○, ♂, ⚥, ♀}, pero las flechas $\leftharpoondown$ no definen una *función* del conjunto {○, ♂, ⚥, ♀} en el conjunto $\{\spadesuit, \heartsuit, \clubsuit\}$, pues el elemento ♂ no tiene asociado ningún elemento del conjunto $\{\spadesuit, \heartsuit, \clubsuit\}$.

Ejemplo 10. Otro ejemplo de *categoría* es la *categoría de grupos*, en la cual los objetos son los grupos. Un *grupo* es un *conjunto* G que tiene una *operación binaria* $\cdot$, es decir, dados dos elementos $a, b \in G$ se pueden operar (como sumar o multiplicar) para obtener otro elemento $c \in G$, lo cual se escribe $a \cdot b = c$. Además G tiene un *elemento neutro* e, es decir $a \cdot e = e \cdot a = a$ para todo elemento $a \in G$, y todo elemento $a \in G$ tiene un *elemento inverso* $\bar{a}$ es decir $a \cdot \bar{a} = \bar{a} \cdot a = e$.

Es fácil ver que el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ con la operación suma +, es un grupo donde el *elemento neutro* es el 0 y el *elemento inverso* del entero n es $-n$. Si al conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ (las fracciones positivas y negativas) le quitamos el 0, entonces con la operación multiplicación $\times$, es un grupo donde el *elemento neutro* es el 1 y el *elemento inverso* de la fracción $\frac{a}{b}$ es $\frac{b}{a}$. Los números naturales

© Coordinación de Publicaciones Digitales. DGSCA-UNAM
Se autoriza la reproducción total o parcial de este artículo, siempre y cuando se cite la fuente completa y su dirección electrónica.

$\mathbb{N}$ no son un grupo con la operación suma +, pues no existen los elementos inversos. Otro ejemplo de grupo es el conjunto $\{-1, 1\}$ con la operación multiplicación $\times$, donde el elemento neutro es el 1 y cada elemento es su propio e*lemento inverso*.

Al final del Ejemplo 7 vimos que el conjunto $\mathbb{Z}_2$ tiene solamente de dos elementos, la clase de equivalencia $[0]$ que consiste de todos los números pares y la clase de equivalencia $[1]$ que consiste de todos los números impares. El conjunto $\mathbb{Z}_2$ es un grupo con la operación suma +, definida de la siguiente manera:

$$[0] + [0] = [0], \quad [0] + [1] = [1], \quad [1] + [0] = [1], \quad [1] + [1] = [0], \tag{5}$$

la cual refleja que la suma de dos números **pares** es nuevamente **par,** la suma de un número par y un número **impar** es **impar** y la suma de dos números **impares** es **par.** También se observa que $[0]$ es el *elemento neutro* y cada elemento es su propio *elemento inverso.*

Los *morfismos* en la *categoría de grupos* se llaman *homomorfismos* y son *funciones* que **preservan las operaciones**, es decir, si tenemos al grupo G con la operación + y al grupo H con la operación $*$, entonces un homomorfismo f del grupo G al grupo H, es una función $f: G \to H$ del conjunto G en el conjunto H, tal que si $a, b \in G$, entonces $f(a + b) = f(a) * f(b)$.

Un ejemplo de un *homomorfismo* $f: \mathbb{Z} \to \{-1, 1\}$ está definido de la siguiente manera: si $n \in \mathbb{Z}$ es **par**, entonces $f(n) = 1$, si $n \in \mathbb{Z}$ es **impar,** entonces $f(n) = -1$. Es fácil ver que si $m, n \in \mathbb{Z}$, entonces $f(m + n) = f(m) \times f(n)$.

En una categoría hay un tipo especial de *morfismos* llamados *isomorfismos,* dados dos objetos en la categoría, no necesariamente existe un isomorfismo entre ellos, pero si existe, decimos que dichos objetos son *isomorfos*[6]. En una categoría podemos definir una *relación de equivalencia* definiendo que dos objetos están relacionados si son *isomorfos*. Las clases de equivalencia consisten de todos los objetos que son *isomorfos* entre sí, por lo que se les llama clases de *isomorfismo.* Dichas clases son muy importantes en matemáticas, pues en una categoría dos objetos *isomorfos* son considerados como **iguales**, por lo tanto, al estudiar una categoría dada, uno de los objetivos es encontrar todas las *clases de isomorfismo*, pues así se conocerán todos los objetos de la categoría que son **esencialmente distintos.**

Por otra parte, muchas veces dentro de una *clase de isomorfismo* hay algún objeto que es más simple que todos los demás al cual se le llama *objeto reducido* y en general es más fácil estudiar al *objeto reducido* en vez de estudiar cualquier otro objeto *isomorfo*. También las distintas clases de *isomorfismo* se pueden representar usando dichos *objetos reducidos*. Esto es análogo al Ejemplo 4 donde las clases de equivalencia se podían ver como fracciones, en la clase de equivalencia $[(1, 2)]$ la pareja $(1, 2)$ es el elemento más simple, en el sentido de que ambos números son primos relativos entre sí, es decir, 1 es el único divisor común.

En la categoría de conjuntos los isomorfismos son las *biyecciones*, (3) es una *biyección* entre los conjuntos $\{\spadesuit, \heartsuit, \clubsuit\}$ y {☕, ⚽, 🚲} y por lo tanto son *isomorfos*. En general, dos conjuntos son isomorfos si tienen el **mismo** número de elementos.

En la categoría de grupos los *isomorfismos* son los *homomorfismos* que son también *biyecciones*. Los grupos $\mathbb{Z}_2$ y $\{-1, 1\}$ son *isomorfos* mediante el *isomorfismo* dado por la siguiente *biyección*

6 Del griego iso=mismo, morfos=forma.

© Coordinación de Publicaciones Digitales. DGSCA-UNAM
Se autoriza la reproducción total o parcial de este artículo, siempre y cuando se cite la fuente completa y su dirección electrónica.

10 de enero 2009 • Volumen10 Número 1 • ISSN: 1067-6079

$$[0] \rightleftharpoons 1$$
$$[1] \rightleftharpoons -1$$

la cual es un homomorfismo pues tenemos que las igualdades

$$1 \times 1 = 1, \quad 1 \times (-1) = -1, \quad (-1) \times 1 = -1, \quad (-1) \times (-1) = 1$$

son exactamente las "mismas" igualdades que en (5), pero reemplazando $[0]$ por 1, $[1]$ por -1 y + por $\times$. En este ejemplo se puede ver por qué objetos isomorfos (misma forma) son considerados como **iguales,** pues vemos que los grupos $\mathbb{Z}_2$ y $\{-1, 1\}$ son prácticamente el mismo, solamente con los nombres de los elementos y la operación cambiados, o como dice el dicho popular, son "la misma gata, nada más que revolcada".

En muchas *categorías* en matemáticas sus *objetos* constan de un *conjunto* con una estructura adicional. Por ejemplo, los *grupos son conjuntos* y la estructura adicional es la *operación binaria*. Este tipo de objetos, al ser conjuntos, podemos definir *relaciones de equivalencia* en ellos y obtener su *conjunto cociente*, es decir, el conjunto de *clases de equivalencia* y en general a dicho *conjunto cociente* se le puede dotar de una estructura adicional para que sea un objeto de la categoría en cuestión, a dicho objeto se le llama *objeto cociente.* Nuevamente esto se comprende mejor con un ejemplo.

En el Ejemplo 10 vimos que el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ es un grupo con la operación suma +. En el Ejemplo 7, definimos la *congruencia módulo* 2, la cual es una *relación de equivalencia* en $\mathbb{Z}$ y el conjunto cociente es el conjunto $\mathbb{Z}_2 = \{[0], [1]\}$ al cual dotamos de una *operación* suma +, definida por (5) la cual convierte al conjunto $\mathbb{Z}_2$ en un grupo. Por lo tanto, $\mathbb{Z}_2$ es el *grupo cociente* obtenido por la *relación de equivalencia dada por la congruencia módulo* 2.

No es lo mismo pero es igual. . .

Una manera de explicar cómo aprendemos algunos conceptos es mediante las clases de equivalencia. Por ejemplo con los números naturales, todos sabemos "que es" el número 7, pero no es fácil explicarlo. El símbolo "7" no es el número siete, sino una manera de representarlo, al igual que "VII"; el número 7 no es los colores del arcoiris[1], ni los días de la semana, ni las maravillas del mundo antiguo[2], tampoco los pecados capitales[3], ni las virtudes[4] para contrarrestarlos, el número siete es algo que tienen todos estos conjuntos en común.

Mi sobrinita Sofía tiene un año siete meses, aún no sabe los colores, algún día no muy lejano alguien le enseñará una manzana y le dirá que la manzana es roja y pensará que rojo es algo inherente a la manzana, otro día (o el mismo, si esta desayunando fruta) le enseñarán una fresa y le dirán que es roja, tal vez se sentirá un poco confundida, pues le habían dicho que roja era otra cosa (la manzana), pero después le enseñarán la flor de un rosal, la sangre o el cielo al atardecer y le dirán que son rojos, entonces entenderá que rojo no es ninguna de las cosas anteriores, sino algo que tienen en común, su clase de equivalencia. Ese día comprenderá, que una manzana y una rosa no son lo mismo, pero que en cuanto a color se refiere

---

1 Rojo, anaranjado, amarillo, verde, azul, índigo, violeta.

2 Pirámide de Giza, jardines colgantes de Babilonia, templo de Artemisa, estatua de Zeus en Olimpia, sepulcro de Mausolo en Halicarnaso, Coloso de Rodas, faro de Alejandría.

3 Luxuria, gula, avaritia, ira, invidia, superbia, acidia. (En latín)

4 Castitas, frenum, liberalitas, patientia, humanitas, humilitas, industria. (En latín)

© Coordinación de Publicaciones Digitales. DGSCA-UNAM
Se autoriza la reproducción total o parcial de este artículo, siempre y cuando se cite la fuente completa y su dirección electrónica.

son iguales.

Referencias

RUSSELL, Bertrand. “El concepto de número”. En: Sigma, El mundo de las Matemáticas.
Ed. Newman, J. R. Grijalbo. Volumen 4, Capítulo 1.

© Coordinación de Publicaciones Digitales. DGSCA-UNAM
Se autoriza la reproducción total o parcial de este artículo, siempre y cuando se cite la fuente completa y su dirección electrónica.

© Coordinación de Publicaciones Digitales. DGSCA-UNAM
Se autoriza la reproducción total o parcial de este artículo, siempre y cuando se cite la fuente completa y su dirección electrónica.

© Coordinación de Publicaciones Digitales. DGSCA-UNAM
Se autoriza la reproducción total o parcial de este artículo, siempre y cuando se cite la fuente completa y su dirección electrónica.

10 de enero 2009 • Volumen10 Número 1 • ISSN: 1067-6079

© Coordinación de Publicaciones Digitales. DGSCA-UNAM
Se autoriza la reproducción total o parcial de este artículo, siempre y cuando se cite la fuente completa y su dirección electrónica.